Перейдем в соотношениях (2) к пределу при $x \to 0$. Пределы левой и правой частей (2) равны 1, поэтому существует и притом равный 1 предел средней части (2).

§ 4.10. Порядок переменной, эквивалентность (асимптотика)

Говорят, что f *на множестве точек E имеет порядок* φ или еще f *есть O большое от* φ *на E* и пишут при этом

$$f(x) = O(\varphi(x)) \text{ на } E, \tag{1}$$

если

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)| \text{ на } E, \tag{2}$$

где C — не зависящая от x положительная константа.

В частности,

$$f(x) = O(1) \text{ на } E$$

обозначает тот факт, что f на E ограничена.

Очевидно, если $f(x) = O(\varphi_1(x))$ на E и $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ на E, то $f(x) = O(\varphi_2(x))$ на E.

Примеры.

1. $\sin x = O(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.
2. $x = O(x^2)$ на $[1, \infty]$ (но не на $[0, 1]$); при этом x^2 и x здесь переставить местами, очевидно, нельзя. С другой стороны, $x^2 = O(x) = O(1)$ на $[0, 1]$.

Мы будем писать

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \to a) \tag{3}$$

и говорить, что *функция f есть о малое от φ при $x \to a$*, если

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x), \tag{3'}$$

где функция $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to a)$.

Мы также будем писать

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \to a), \tag{4}$$

если существует окрестность $U(a)$ точки a (конечной и бесконечной) такая, что

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \in U(a),\ x \neq a). \tag{4'}$$

Само собой разумеется, что определение (3), так же как и (4), предполагает, что обе функции f и φ определены на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Если на некоторой такой окрестности (исключая точку a) $\varphi(x) \neq 0$, то определения (3) и (4), очевидно, эквивалентны следующим: говорят, что *f есть о малое от φ при $x \to a$*, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \tag{5}$$

и f *есть* O *большое от* φ *при* $x \to a$, если существует окрестность $U(a)$, на которой, за исключением точки a, отношение $f(x)/\varphi(x)$ ограничено. Можно считать, что стремление $x \to a$ происходит только слéва ($x < a$) или справа ($x > a$), и тогда для бесконечной точки в первом случае надо считать, что $x \to +\infty$ и во втором, что $x \to -\infty$. Конечно, под окрестностью a понимается тогда правая или соответственно левая ее окрестность.

Наконец, можно считать в (3), (4), что x стремится к конечному или бесконечному пределу a, пробегая определенную последовательность $x_1, x_2, \ldots$

Очевидно, что если $f(x) = o(\varphi(x))$ $(x \to a)$, а $\varphi(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, то $f(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, потому что

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x) = \varepsilon(x)\varepsilon_1(x)\psi(x) = \varepsilon_2(x)\psi(x),$$

где $\varepsilon_2(x) = \varepsilon(x)\varepsilon_1(x) \to 0$ $(x \to a)$, так как $\varepsilon(x) \to 0$ и $\varepsilon_1(x) \to 0$.

Примеры.

1. $x^n = o(e^x)$ $(x \to +\infty)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
2. $x^2 = o(x)$ $(x \to 0)$.
3. $x = o(x^2)$ $(x \to \infty)$.
4. $\ln x = o(x)$ $(x \to +\infty)$.
5. $x = O(\sin x)$ $(x \to 0)$.

Говорят, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны* (*равны асимптотически*) при $x \to a$ и пишут

$$f_1(x) \approx f_2(x) \quad (x \to a),$$

если обе они определены и не равны нулю на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1. \tag{6}$$

Здесь относительно стремления x к a можно согласиться, так же как выше.

Теорема 1. *Для того чтобы две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ были эквивалентными (равными асимптотически) при $x \to a$, необходимо и достаточно чтобы выполнялись свойства*

$$f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \quad (x \to a), \qquad f_2(x) \neq 0 \quad (x \neq a). \tag{7}$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 + \varepsilon(x) \qquad (\varepsilon(x) \to 0,\ x \to a),$$

откуда

$$f_1(x) = f_2(x) + \varepsilon(x) f_2(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \quad (x \to a),$$

т. е. справедливо (7).

Обратно, пусть имеет место (7). Тогда $f_1(x) = f_2(x) + \varepsilon(x) f_2(x)$, где $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to a)$. Отсюда

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 + \varepsilon(x),$$

и после перехода к пределу при $x \to a$ получим (6).

Заметим, что если $f_1(x) \approx f_2(x)$ $(x \to a)$, то, очевидно, и обратно, $f_2(x) \approx f_1(x)$ $(x \to a)$.

Теорема 2. *Пусть в окрестности точки a, за исключением, быть может, ее самой, заданы три функции, $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\Lambda(x)$. Если $f_1(x) \approx f_2(x)$ при $x \to a$, то*

$$\lim_{x \to a} \{f_1(x) \Lambda(x)\} = \lim_{x \to a} \{f_2(x) \Lambda(x)\}. \tag{8}$$

Это равенство надо понимать в том смысле, что *если существует предел правой его части, то существует также, и притом ему равный, предел левой части, и обратно.*

Отсюда следует, что если один из пределов не существует, то не существует и второй.

Доказательство. Пусть существует предел, стоящий в правой части (8), равный A. Тогда, очевидно,

$$\lim_{x \to a} \{f_1(x) \Lambda(x)\} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \lim_{x \to a} \{f_2(x) \Lambda(x)\} = 1 \cdot A = A.$$

Аналогично доказывается существование предела правой части (8) и равенство (8), если известно, что существует предел левой части (8).

Доказанная теорема очень проста и в то же время она весьма важна. Для применения ее на практике надо знать побольше случаев эквивалентных пар функций.

Ниже мы приводим ряд таких случаев.

1) $\sin x \approx x$ $(x \to 0)$, потому что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $1 - \cos x \approx \frac{1}{2} x^2$ $(x \to 0)$, потому что

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Второе равенство в этой цепи верно на основании теоремы 2 в силу того, что $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$ $(x \to 0)$.

3) $e^h - 1 \approx h$ $(h \to 0)$, потому что, если положить $e^h - 1 = z$, то $e^h = 1 + z$, $h = \ln(1 + z)$ и

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\ln(1 + z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\ln(1 + z)^{1/z}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

При этом предпоследнее равенство верно, потому что $\ln u$ есть функция непрерывная для $u>0$ и, в частности, в точке $u=e$.

4) $\ln(1+u)\approx u$ $(u\to 0)$, потому что

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=\lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{1/u}=\ln e=1.$$

5) $\sqrt[n]{1+u}-1\approx\frac{u}{n}(u\to 0), n=1, 2, \ldots,$ потому что

$$\frac{\sqrt[n]{1+u}-1}{\frac{u}{n}}=\frac{u}{\frac{u}{n}\left[(1+u)^{(n-1)/n}+(1+u)^{(n-2)/n}+\ldots+1\right]}\to 1\ (u\to 0).$$

Учесть, что функция $(1+u)^\alpha$ непрерывна в точке $u=0$.

6) $\operatorname{tg}x\approx x$ $(x\to 0)$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1,$$

так как $\cos x$ — непрерывная функция.

Например, в силу 2) и 5) и теоремы 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{3}. \tag{9}$$

Полезно следующее определение. Если для функции $\varphi(x)$ можно подобрать числа α и m, где $\alpha\neq 0$, такие, что $\varphi(x)\approx\alpha x^m$, $x\to 0$, то говорят, что *функция* αx^m *есть главный степенной член функции* $\varphi(x)$. Очевидно, что числа α, m однозначно зависят от функции $\varphi(x)$.

Правые части асимптотических равенств 1)—6) суть, очевидно, главные степенные члены левых частей. Общие методы нахождения главных степенных членов в более сложных случаях основаны на применении формулы Тейлора (см. далее § 5.11, примеры 3, 4, и § 5.14).

Если αx^m, βx^n $(\alpha, \beta\neq 0)$ суть, соответственно, главные степенные члены функций φ и ψ, то на основании теоремы 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^m}{\beta x^n}=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta} & (m=n),\\ 0 & (m>n),\\ \infty & (m<n).\end{cases} \tag{10}$$

Это рассуждение в частном случае было проведено при вычислении предела (9).