§ 4.2. Непрерывность функции в точке

По определению, функция f называется *непрерывной в точке* (*конечной*) a, если она определена в некоторой окрестности точки a (в том числе и в самой точке a) и если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

На основании сказанного в § 4.1 о пределе функции в точке можно дать следующую развернутую формулировку непрерывности функции в точке:

Функция f называется непрерывной в точке a, если она определена на некотором интервале (c, d), содержащем точку a, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

В силу сказанного в § 4.1 приведенной формулировке полностью эквивалентна следующая формулировка:

Функция f непрерывна в точке a, если она определена на некотором интервале (c, d), содержащем a, и если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, имеет место

$$\lim_{x_n \to a} f(x_n) = f(a).$$

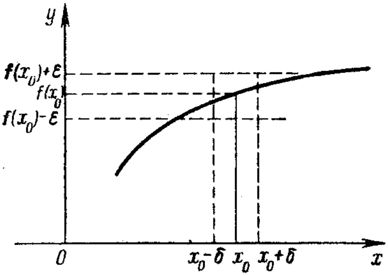

Рис. 4.2.

Если функция $f(x)$, *заданная в окрестности точки a*, не является непрерывной в точке a, т. е. если для нее не выполняется высказанное выше свойство, то говорят, что она *разрывна в точке a*.

Можно дать и прямое определение разрывности f в точке a:

Пусть функция f определена в окрестности точки a и пусть существует такое положительное число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка x_δ такая, что

$$|a - x_\delta| < \delta, \quad |f(a) - f(x_\delta)| \geqslant \varepsilon_0;$$

тогда $f(x)$ разрывна в точке a.

Рассмотрим непрерывную кривую C — график непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 4.2). Термин «непрерывная кривая» здесь употреблен в житейском (интуитивном) смысле — ее можно начертить всю, не отрывая карандаша от бумаги.

Зададим произвольное значение $x_0 \in (a, b)$. Ему соответствует значение $f(x_0)$ нашей функции. Зададим $\varepsilon > 0$ и проведем три прямые параллельно оси x, соответственно на расстояниях $f(x_0) - \varepsilon$,

$f(x_0)$ и $f(x_0)+\varepsilon$ от оси x. Легко видеть, что для нашей (непрерывной) кривой всегда можно подобрать такое $\delta>0$ (зависящее от ε), что для всех x, принадлежащих интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, соответствующие ординаты $f(x)$ нашей кривой будут удовлетворять неравенствам

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Другими словами, для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Таким образом, математическое определение непрерывности функции отвечает интуитивному понятию непрерывной кривой.

Обратимся еще к графику, изображенному на рис. 4.3.

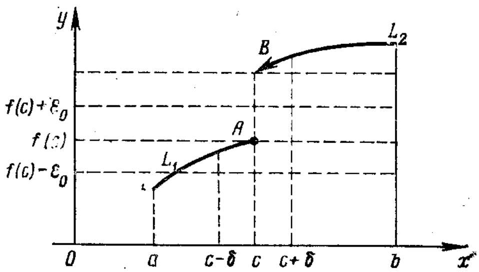

Рис. 4.3.

Этот график представляет собой разрывную кривую L, состоящую из двух непрерывных кусков L_1 и L_2. Кусок L_1 взаимно однозначно проектируется (в направлении оси y) на отрезок $[a, c]$. Кусок же L_2 предполагается лишенным левой концевой точки, он взаимно однозначно проектируется на полуинтервал $(c, b]$. Каждому значению $x\in[a, b]$ соответствует единственное значение $y=f(x)$, равное ординате точки кривой L, имеющей абсциссу x. Кривая L разрывна, она состоит из двух не склеенных друг с другом кусков L_1 и L_2. Разрыв имеет место при переходе аргумента x через значение c. Убедимся в том, что функция $f(x)$ также не является непрерывной в точке c. Очевидно, что $f(c)=Ac$ (рис. 4.3). Возьмем положительное число $\varepsilon_0<AB$. Внимательное рассмотрение чертежа показывает, что как бы ни было мало $\delta>0$, среди значений x, удовлетворяющих неравенству $|c-x|<\delta$, имеются такие, а именно бо́льшие чем c, что для них

$$|f(x)-f(c)|>\varepsilon_0.$$

Таким образом, разрывному графику соответствует разрывная функция. В данном случае функция $f(x)$ разрывна в точке c (ср. с § 1.4).

Величина $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ называется *приращением функции f в точке x, соответствующим приращению h независимой переменной.*

Мы можем понятие непрерывности функции f в точке a выразить еще следующим образом (на языке h): *функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если функция $f(a+h)$ от h определена в некоторой окрестности $h=0$ и если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для $|h| < \delta$ выполняется*

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, функция f непрерывна в точке a, если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению h аргумента, стремится к нулю вместе с h.

Из свойств предела функции (см. § 4.1) и определения непрерывности в точке немедленно следует

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a, то непрерывны также в точке a и их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$ и произведение $f(x)\varphi(x)$, а также и частное $f(x)/\varphi(x)$ при добавочном условии, что $\varphi(a) \neq 0$.*

Докажем еще теорему о непрерывности функции от функции.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a и функция $f(y)$ непрерывна в точке $b=\varphi(a)$, то функция от функции $F(x) = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Вследствие непрерывности функции f в точке b найдется такое $\sigma > 0$, что функция $f(y)$ определена на интервале $(b-\sigma,\ b+\sigma)$ и выполняется неравенство

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon \text{ для } |y-b| < \sigma. \tag{2}$$

А вследствие непрерывности функции φ в точке a найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(x)$ определена на интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$ и $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \sigma$ для

$$|x-a| < \delta. \tag{3}$$

Из полученных соотношений следует, что для всех x, удовлетворяющих неравенству (3), функция $f(\varphi(x))$ определена и имеет место неравенство

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \text{ или } |F(x) - F(a)| < \varepsilon, \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать непрерывность F в точке $x=a$, рассуждают еще так. Так как функция φ непрерывна в точке a и функция f непрерывна в точке $b=\varphi(a)$ и, кроме того, $F(a) = f(\varphi(a))$, то для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$ имеет место

$$\lim_{x_n \to a} F(x_n) = \lim_{\varphi(x_n) \to \varphi(a)} f(\varphi(x_n)) = f(\varphi(a)) = F(a).$$

Если функция $\Phi(x)$ получена из нескольких функций с помощью только арифметических действий и операций функции от функции, то установление факта непрерывности Φ в данной точке может быть сведено к последовательному применению предыдущих двух теорем, если эти теоремы применяются конечное число раз.

Отметим следующие теоремы, непосредственно вытекающие из определения непрерывности функций в точке и из теорем § 4.1 о пределе функции.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой $f(x)$ ограничена.*

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой*

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}.$$

Больше того, если $f(a) > 0$, то

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) \quad (x \in U(a)),$$

а если $f(a) < 0$, то

$$f(x) < \frac{f(a)}{2} \quad (x \in U(a)).$$

Пример 1. Постоянная функция $f(x) = C$ определена и непрерывна для любого значения x, потому что приращение ее, соответствующее любому приращению h, равно

$$\Delta C = C - C = 0,$$

и следовательно, тривиальным образом $\Delta C \to 0$ $(h \to 0)$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определена на всей действительной оси и непрерывна на ней.

В самом деле, функция $y = x$ очевидно, непрерывна для любого x. Поэтому этот же факт имеет место для функции $x^2 = xx$, но тогда и для $x^3 = x^2x$. По индукции приходим к непрерывности x^n.

Пример 3. Алгебраический многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

$(a_0, \ldots, a_n$ — заданные числа и n — натуральное число) есть, очевидно, функция, непрерывная для любого x, потому что x^{n-k} $(k = 0, 1, \ldots, n)$ есть, как показано выше, непрерывная на действительной оси функция, a_kx^{n-k} есть непрерывная на оси функция как произведение двух непрерывных на оси функций a_k и x^{n-k} и, наконец, $P(x)$, непрерывна на оси как сумма конечного числа непрерывных на оси функций.

Пример 4. Рациональная функция

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + \ldots + a_n}{b_0x^m + \ldots + b_m}, \qquad b_0 \neq 0$$

$(n, m$ — натуральные числа и a_k, b_k — заданные числа) есть непрерывная функция для всех значений x, для которых $Q(x) \neq 0$. Это следует из того, что $f(x)$ получается из непрерывных функций x^k и чисел, взятых в конечном числе, путем производства над ними арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления).

Пример 5. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна для всех значений x. Это вытекает из следующих рассуждений.

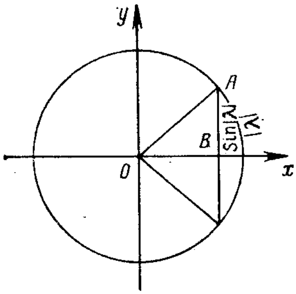

Рис. 4.4.

Имеет место неравенство $|\sin\lambda| \leqslant |\lambda|$. Чтобы доказать его при $|\lambda| \leqslant \pi/2$, помножим его (обе его части) на 2, и тогда левая его часть будет равна длине хорды (рис. 4.4), стягивающей дугу длины $2|\lambda|$. Если теперь $|\lambda| \geqslant \pi/2$, то $|\lambda| \geqslant \pi/2 > 1 \geqslant |\sin\lambda|$. Поэтому

$$|\sin(x+h) - \sin x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right|\cdot 1 = |h|$$

и $|\sin(x+h) - \sin x| \to 0$ при $h \to 0$, а это значит, что функция $\sin x$ в точке x (любой) непрерывна.

Пример 6. Функция $\cos x$ непрерывна для всех значений x потому, что

$$|\cos(x+h) - \cos x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right|\cdot 1 = |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

Из полученного неравенства видно, что для всякого ε можно найти δ (в данном случае $\delta = \varepsilon$) такое, что если $|h| < \delta$, то $|\cos(x+h) - \cos x| < \varepsilon$.

Замечание. В этой книге мы исходим из обычного геометрического определения тригонометрических функций (см. § 1.3, п. 7). Но возможны другие их определения, носящие чисто аналитический характер (см. § 10.11).

Пример 7. Функция $|x|$ непрерывна для всех значений x, потому что

$$\big|\,|x+h| - |x|\,\big| \leqslant |x+h-x| = |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

Если функция f не является непрерывной в точке $x = a$ и в то же время существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то говорят, что она имеет *устранимый разрыв* в этой точке. Этим хотят сказать, что f можно видоизменить в точке a (если она определена в a) или доопределить ее в этой точке (если она в a не определена), положив $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, и после этого f станет непрерывной функцией в этой точке.

Пример 8. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1, \end{cases}$$

очевидно, разрывна в точке $x = 1$. Но этот разрыв устраняется, если положить $f(1) = 2$.

Если функция f непрерывна для всех x в достаточно малой окрестности точки a, за исключением $x = a$, и неограничена в этой окрестности, то говорят, что *f имеет бесконечный разрыв в a*.

Пример 9. Функция $\sin(1/x)$ может служить примером ограниченной функции с неустранимым разрывом в $x=0$, а функция $\operatorname{tg} x$ — примером функции, имеющей бесконечные разрывы $\left(\text{в точках } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

Пример 10. Функции $\cos(\sin x^2)$ и $(\sin x)^2$ являются непрерывными на всей действительной оси функциями. Это следует из того, что функции x^2, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на действительной оси, и из теоремы о непрерывности функции от функции.

§ 4.3. Пределы функции справа и слева. Монотонная функция

По определению, *левой окрестностью точки* (числа) a называется произвольный полуинтервал $(c, a]$, а *правой окрестностью* a называется произвольный полуинтервал $[a, d)(c < a < d)$. *Окрестностью* («точки») $+\infty$ естественно считать (*полубесконечный*) *интервал* $(N, +\infty)$, а *окрестностью* $-\infty$ *интервал* $(-\infty, N)$, где N — в обоих случаях произвольное (конечное) число. Можно еще говорить, что окрестности $+\infty$, $-\infty$ суть соответственно левая и правая окрестности («точки») ∞.

На основе этих определений вводится понятие *правого* и *левого предела* функции f в точке a (конечной и бесконечной). Например, говорят, что A есть *правый предел f в точке a* (конечной или бесконечной), если f определена в некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую правую окрестность a, что для всех принадлежащих к ней $x \neq a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Впрочем, правый (левый) предел f в ∞ обычно называют пределом f при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

Можно еще дать другое определение правого предела функции в точке. Говорят, что функция *f имеет правый предел в точке a* (конечной или бесконечной), равный числу A, если она определена на некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = A$ для любой сходящейся к *a последовательности* $\{x_n\}$, значения которой $x_n \neq a$ и принадлежат к указанной правой окрестности.

Тот факт, что оба сформулированные определения правого предела эквивалентны, доказывается совершенно аналогично тому, как это делается в случае предела (см. § 4.1).

Сказанное понятным образом переносится на понятие левого предела. Вообще, теоремы § 4.1 о пределах по аналогии переносятся на правые и левые пределы.