Пример 9. Функция $\sin(1/x)$ может служить примером ограниченной функции с неустранимым разрывом в $x = 0$, а функция $\operatorname{tg} x$ — примером функции, имеющей бесконечные разрывы $\left(\text{в точках } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

Пример 10. Функции $\cos(\sin x^2)$ и $(\sin x)^2$ являются непрерывными на всей действительной оси функциями. Это следует из того, что функции x^2, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на действительной оси, и из теоремы о непрерывности функции от функции.

§ 4.3. Пределы функции справа и слева. Монотонная функция

По определению, *левой окрестностью точки* (числа) a называется произвольный полуинтервал $(c, a]$, а *правой окрестностью* a называется произвольный полуинтервал $[a, d)$ $(c < a < d)$. *Окрестностью* («точки») $+\infty$ естественно считать (*полубесконечный*) *интервал* $(N, +\infty)$, а *окрестностью* $-\infty$ *интервал* $(-\infty, N)$, где N — в обоих случаях произвольное (конечное) число. Можно еще говорить, что окрестности $+\infty$, $-\infty$ суть соответственно левая и правая окрестности («точки») ∞.

На основе этих определений вводится понятие *правого* и *левого предела* функции f в точке a (конечной и бесконечной). Например, говорят, что A есть *правый предел* f *в точке* a (конечной или бесконечной), если f определена в некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую правую окрестность a, что для всех принадлежащих к ней $x \neq a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Впрочем, правый (левый) предел f в ∞ обычно называют пределом f при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

Можно еще дать другое определение правого предела функции в точке. Говорят, что функция f *имеет правый предел в точке* a (конечной или бесконечной), равный числу A, если она определена на некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = A$ для любой сходящейся к a *последовательности* $\{x_n\}$, значения которой $x_n \neq a$ и принадлежат к указанной правой окрестности.

Тот факт, что оба сформулированные определения правого предела эквивалентны, доказывается совершенно аналогично тому, как это делается в случае предела (см. § 4.1).

Сказанное понятным образом переносится на понятие левого предела. Вообще, теоремы § 4.1 о пределах по аналогии переносятся на правые и левые пределы.

Если a — конечная точка, то правый и левый пределы f в ней записываются соответственно так:

$$f(a+0)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x),\quad f(a-0)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

Пользуясь определением пределов на «языке ε и δ», легко доказать, что для того чтобы f имела предел в конечной точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали правый и левый пределы f в этой точке и были равны между собой, и тогда $f(a+0)=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пределы f при $x\to-\infty, +\infty, \infty$ часто записывают соответственно так:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty),\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty),\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=f(\infty).$$

Здесь, как в случае конечной точки, имеет место очевидное утверждение: для того чтобы существовал предел f при $x\to\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой пределы f при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ и тогда $f(-\infty)=$ $=f(+\infty)=f(\infty)$.

До сих пор мы говорили о конечных пределах функции (A было конечно!), но можно по аналогии ввести пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Например, последнее из этих четырех соотношений выражает, что функция f определена для всех x, меньших некоторого числа (т. е. на некоторой окрестности $-\infty$), и каково бы ни было положительное число N, найдется такое число L, что для всех $x<L$ имеет место $f(x)<-N$.

Односторонние пределы, т. е. пределы справа и слева, имеют большое значение при рассмотрении монотонных функций.

Пусть E — множество действительных чисел (точек прямой). Функция f, определенная на E, называется *неубывающей* (*невозрастающей*) *на* E, если из того, что $x', x''\in E$ и $x'<x''$, следует, что $f(x')\leqslant f(x'')$ (соответственно $f(x')\geqslant f(x'')$).

Неубывающие и невозрастающие на E функции носят общее название *монотонных функций на* E.

Теорема 1. *Пусть функция f не убывает на интервале (a, b), где, в частности, может быть $a=-\infty$, $b=+\infty$. Если она ограничена сверху числом M, то существует предел (конечный) $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\leqslant M$. Если же она не ограничена сверху, то $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)=+\infty$.*

Доказательство. Из ограниченности f следует существование конечной точной верхней грани $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = A \leqslant M$. Таким образом, $f(x) \leqslant A$ для всех $x \in (a, b)$, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $A - \varepsilon < f(x_1) \leqslant A$. Но в силу того, что f не убывает, $f(x_1) \leqslant f(x)$, $x_1 \leqslant x < b$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $x_1 < b$ такое, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_1 < x < b$. Это и значит, что

$$A = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x).$$

Пусть теперь неубывающая функция f не ограничена сверху. Тогда для любого M существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $M < f(x_1)$ и вследствие того, что f не убывает на (a, b),

$$M < f(x_1) \leqslant f(x), \qquad x_1 < x < b,$$

а это и говорит о том, что

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty.$$

По образцу доказанной теоремы легко доказывается и

Теорема 2. *Если функция f не убывает на (a, b), где может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$, и $f(x)$ ограничена снизу числом m, то существует (конечный) предел функции f в точке a справа:*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = A \geqslant m.$$

Если же функция f не ограничена снизу, то

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty.$$

Читатель может самостоятельно видоизменить формулировки и доказательства подобных теорем для невозрастающей на (a, b) функции.

Пример. На отрезке $[0, 2]$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leqslant x < 1, \\ x+1 & \text{для } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Она однозначна и монотонна на $[0, 2]$. Легко видеть, что $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = f(1) = 2$.

Теорема 3. *Если функция f не убывает на отрезке $[a, b]$, то в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$ и выполняются неравенства*

$$f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0).$$

Существуют также пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$f(a) \leqslant f(a+0), \quad f(b-0) \leqslant f(b).$$

Эта теорема немедленно следует из предыдущих теорем, если учесть, что из ее условий вытекает, что функция f не убывает на каждом из отрезков $[a, x]$, $[x, b]$.

Можно ввести понятие *непрерывности функции в точке справа и слева.*

Функция f называется *непрерывной в точке* a (конечной) *справа* (*слева*), если существует $f(a+0)$ и $f(a+0)=f(a)$ (соответственно, если существует $f(a-0)$ и $f(a-0)=f(a)$).

Если для функции f в точке a (конечной) имеют смысл оба числа $f(a-0)$ и $f(a+0)$ (конечные) и если она все же разрывна в a, то говорят, что эта функция *имеет разрыв первого рода в точке* a.

Отметим, что *если функция f непрерывна как справа, так и слева в точке a, то она, очевидно, непрерывна в точке a.* Можно

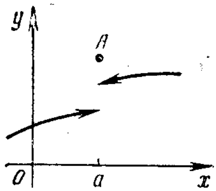

Рис. 4.5.

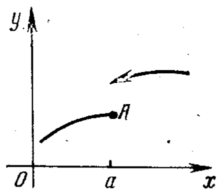

Рис. 4.6.

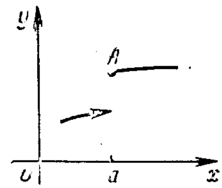

Рис. 4.7.

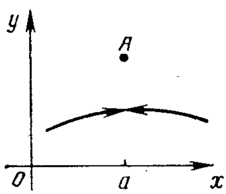

Рис. 4.8.

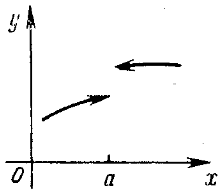

Рис. 4.9.

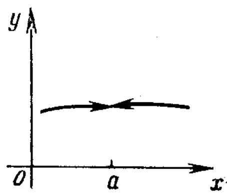

Рис. 4.10.

еще сказать, что *для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы три числа, $f(a-0)$, $f(a)$, $f(a+0)$, имели смысл и чтобы они были равны между собой.*

Мы приводим для примера шесть графиков функций, имеющих разрыв первого рода в точке a. Буква A обозначает точку $A=(a, f(a))$ плоскости. Стрелка на конце куска кривой обозначает, что концевая точка, где находится стрелка, выброшена. На рисунках 4.5—4.8 изображены графики функций f, для которых все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ имеют смысл. На рис. 4.5 числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ различны между собой; функция не только разрывна в a, но и разрывна справа и слева в a. На рис. 4.6 f непрерывна слева в a. На рис. 4.7 f непрерывна справа в a. На рис. 4.8 f имеет устранимый разрыв в a. На рис. 4.9 f не определена в a, разрыв неустраним. На рис. 4.10 f не определена в a, но f можно доопределить в a так, что она будет непрерывной в a.

Заметим следующий важный факт. *Если заданная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *монотонна на нем (не убывает или не возрастает), то, какова бы ни была точка* $x \in [a, b]$, *в ней функция* f *либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода.* Это утверждение есть непосредственное следствие из теорем 1, 2 и определения понятия точки разрыва первого рода *).

Если функция f определена в окрестности точки a, исключая быть может a, и имеет разрыв в a, не являющийся разрывом первого рода, то говорят, что она имеет в a *разрыв второго рода.* Например, функция $\sin(1/x)$ имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

также имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода, потому что хотя для нее и имеет смысл число

$$\psi(0-0) = 0,$$

но не имеет смысла число $\psi(0+0)$.

§ 4.4. Функции, непрерывные на отрезке

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$ (на множестве точек x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$), если она непрерывна во всех точках интервала (a, b) (множества точек x, для которых $a < x < b$), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b **).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, к изложению которых мы сейчас приступим. Впрочем, мы не останавливаемся пока на важном понятии — равномерной непрерывности функции; оно будет изучено позднее (§ 7.10, теорема 4), сразу для функции n переменных. Из полученных там результатов выводятся соответствующие результаты для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции от одной переменной.

---

*) О числе точек разрыва монотонной функции см. конец § 9.5.

**) Подчеркнем, что у отрезка $[a, b]$ всегда его концы — конечные числа (точки).