ция не только разрывна в a, но и разрывна справа и слева в a. На рис. 4.6 f непрерывна слева в a. На рис. 4.7 f непрерывна справа в a. На рис. 4.8 f имеет устранимый разрыв в a. На рис. 4.9 f не определена в a, разрыв неустраним. На рис. 4.10 f не определена в a, но f можно доопределить в a так, что она будет непрерывной в a.

Заметим следующий важный факт. *Если заданная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *монотонна на нем (не убывает или не возрастает), то, какова бы ни была точка* $x \in [a, b]$, *в ней функция* f *либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода.* Это утверждение есть непосредственное следствие из теорем 1, 2 и определения понятия точки разрыва первого рода *).

Если функция f определена в окрестности точки a, исключая быть может a, и имеет разрыв в a, не являющийся разрывом первого рода, то говорят, что она имеет в a *разрыв второго рода*. Например, функция $\sin(1/x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

также имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, потому что хотя для нее и имеет смысл число

$$\psi(0-0) = 0,$$

но не имеет смысла число $\psi(0+0)$.

§ 4.4. Функции, непрерывные на отрезке

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$ (на множестве точек x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$), если она непрерывна во всех точках интервала (a, b) (множества точек x, для которых $a < x < b$), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b **).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, к изложению которых мы сейчас приступим. Впрочем, мы не останавливаемся пока на важном понятии — равномерной непрерывности функции; оно будет изучено позднее (§ 7.10, теорема 4), сразу для функции n переменных. Из полученных там результатов выводятся соответствующие результаты для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции от одной переменной.

---

*) О числе точек разрыва монотонной функции см. конец § 9.5.

**) Подчеркнем, что у отрезка $[a, b]$ всегда его концы — конечные числа (точки).

Начнем со следующей леммы:

Лемма 1. *Если все значения x_n последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к числу α, принадлежат $[a, b]$, то и $\alpha \in [a, b]$.*

Доказательство. Эта лемма следует из теоремы 3 § 3.1.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для каждого натурального числа n найдется точка $x_n \in \in [a, b]$ такая, что

$$|f(x_n)| > n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена (a и b — числа!) и из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\alpha \in [a, b]$ (см. предыдущую лемму и теорему 1 из § 3.7). Но в точке α функция f непрерывна и потому *)

$$\lim_{k=\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(\alpha). \tag{2}$$

Но свойство (2) противоречит свойству (1). Поэтому f может быть только ограниченной на $[a, b]$.

Заметим, что если функция непрерывна на интервале (a, b) или на полуинтервале $[a, b)$ или $(a, b]$, то она не обязательно ограничена на нем. Например, функция $1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нем.

Если эту функцию доопределить, положив $f(0) = 0$, то она будет конечной в любой точке отрезка $[0, 1]$, однако, *неограниченной на нем.*

Теорема 2. *Непрерывная на $[a, b]$ функция f достигает в некоторых точках отрезка $[a, b]$ своих максимума и минимума, т. е. существуют точки α и β, принадлежащие $[a, b]$, для которых имеет место*

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(\alpha), \qquad \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Таким образом, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$ для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. По предыдущей теореме непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена, следовательно, она ограничена сверху некоторым числом K:

$$f(x) \leqslant K \qquad (x \in [a, b]).$$

Но тогда существует точная верхняя грань f на $[a, b]$:

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = M. \tag{3}$$

Число M обладает следующим свойством: для любого натураль-

---

*) Если $\alpha = b$ (соответственно $\alpha = a$), то в этой точке f непрерывна слева (справа).

ного числа n найдется на $[a, b]$ точка x_n такая, что

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{x_n\}$, как принадлежащая к $[a, b]$, ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходящуюся к некоторому числу β, которое заведомо принадлежит $[a, b]$ (учесть лемму 1). Но функция f непрерывна в точке β и потому $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=f(\beta)$. С другой стороны, $M-\frac{1}{n_k}<f\left(x_{n_k}\right)\leqslant$ $\leqslant M$ $(k=1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=M.$$

Но так как $f\left(x_{n_k}\right)$ может стремиться только к одному пределу, то $M=f(\beta)$.

Верхняя грань (3), таким образом, достигается в точке β, т. е., как говорят, *функция f достигает в точке β своего максимума на отрезке* $[a, b]$. Мы доказали, что существует точка $\beta\in[a, b]$, для которой

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=f(\beta).$$

Доказательство другой части теоремы о минимуме аналогично, но его можно свести к доказательству первой части теоремы, учитывая, что

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)=-\max_{x\in[a,b]}\{-f(x)\}.$$

Замечание. Функция $y=x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$ и ограничена на нем; верхняя ее грань $\sup\limits_{x\in(0,1)} x=1$ не достигается, т. е. нет такого $x_0\in(0, 1)$, для которого эта функция равна 1. Таким образом, в доказанной теореме условие непрерывности f *на замкнутом* (содержащем в себе оба конца a и b) *отрезке* существенно.

Очевидно, что $\sup\limits_{x\geqslant 0}\operatorname{arctg} x=\pi/2$. Однако, нет такого x на луче $x\geqslant 0$, для которого функция $\operatorname{arctg} x$ принимает значение $\pi/2$, и она не достигает максимума на $x\geqslant 0$. В данном случае условия теоремы не выполняются: область задания непрерывной функции $\operatorname{arctg} x$ неограничена.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и числа $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a, b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c)=0$.*

Доказательство. Обозначим отрезок $[a, b]$ через Δ_0. Разделим Δ_0 на две равные части. Если в середине Δ_0 функция равна нулю, то теорема доказана; если этого нет, то одна из половинок Δ_0 такова, что на концах ее наша функция принимает значения разных знаков. Обозначим именно эту половинку через Δ_1 и разделим ее на две равные части. Может случиться, что в середине Δ_1 наша функция равна нулю, и тогда теорема доказана. Если нет, то обозначим через Δ_2 ту из половинок, на концах которой f принимает значения разных знаков. Рассуждая так по индукции, мы либо наткнемся на очередном этапе рассуждений на точку $c \in (a, b)$, для которой $f(c) = 0$, и тогда теорема доказана, либо получим последовательность (бесконечную) вложенных друг в друга отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, на каждом из которых f имеет значения разных знаков. Тогда существует точка c, принадлежащая всем Δ_n, следовательно, и $[a, b]$. Очевидно, $f(c) = 0$, потому что, если допустить, например, что $f(c) > 0$, то нашлась бы окрестность U_c точки c такая, что для всех x из $[a, b]$, принадлежащих U_c, функция $f(x)$ была бы положительной, но этого не может быть, потому что при достаточно большом n отрезок $\Delta_n \subset U_c$, а f не сохраняет знак на Δ_n. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ и C — произвольное число, находящееся между числами A и B ($A \neq B$), то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка c, для которой $f(c) = C$.*

Это следствие можно сформулировать и так: *непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a, b]$.*

Доказательство. Определяем новую функцию $F(x) = f(x) - C$, где C — константа — число, находящееся между $A = f(a)$ и $B = f(b)$. Так как f — непрерывная на $[a, b]$ функция, то и F — непрерывная на $[a, b]$ функция. При этом, очевидно, F принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения, имеющие разные знаки. Тогда, по доказанной теореме, должна найтись внутри $[a, b]$ такая точка c, что $F(c) = 0$ или $f(c) - C = 0$, т. е. $f(c) = C$. Это требовалось доказать.

Пример. Уравнение

$$\cos x - x = 0$$

имеет корень на интервале $(0, \pi)$.

В самом деле, функция $f(x) = \cos x - x$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и на концах его принимает значения разных знаков: $f(0) = 1$, $f(\pi) = -(1 + \pi)$.

Замечание. Для разрывной на $[a, b]$ функции доказанная теорема вообще не имеет места, как легко видеть на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$