§ 4.5. Обратная функция

Зададим какую-либо функцию $y=f(x)$ на произвольном множестве чисел (точек на прямой) E и обозначим через $E_1=f(E)$ образ E (см. § 1.3).

Каждому $y \in E_1$ приведем в соответствие множество всех $x \in E$, для которых $y=f(x)$ Это не пустое множество, обозначим его через e_y.

Таким образом, на E_1 определена функция $x=\varphi(y)$, вообще говоря, многозначная. Функция $\varphi(y)$ называется *обратной функцией по отношению* к $f(x)$.

Важно выделить тот случай, когда обратная функция однозначна. Это всегда имеет место, если функция f *строго монотонна*, т. е. строго возрастает или строго убывает на области E своего определения.

Функция f называется *строго возрастающей* (*убывающей*) на E, если из того, что $x', x'' \in E$ и $x' < x''$, следует, что $f(x') < f(x'')$ (соответственно $f(x') > f(x'')$).

Если $f(x)$ есть строго возрастающая (убывающая) функция на E, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$, очевидно, также однозначная, строго возрастающая (убывающая) на образе $E_1=f(E)$ функция.

В этом случае, очевидно, имеют место тождества:

$$\varphi[f(x)]=x,\ x\in E;\quad f[\varphi(y)]=y,\ y\in E_1.$$

При этом удобно обозначать обратную к f функцию символом f^{-1}:

$$f^{-1}f(x)=x,\ x\in E;\quad ff^{-1}(y)=y,\ y\in E_1.$$

Теорема 1. *Пусть $y=f(x)$ есть непрерывная строго возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция и $A=f(a)$, $B=f(b)$.*

Тогда образ $[a, b]$ есть отрезок $[A, B]$ и обратная к f функция $x=\varphi(y)$ однозначна, строго возрастает и непрерывна на $[A, B]$.

В этой теореме можно заменить «возрастающая» на «убывающая» и тогда в ее заключении надо заменить $[A, B]$ на $[B, A]$.

Доказательство. Пусть $E_1=f([a, b])$. По условию $A, B \in E_1$ и, так как функция f непрерывна на $E=[a, b]$, то и любая точка $[A, B]$ принадлежит E_1 (см. следствие теоремы 3 § 4.4 о промежуточных значениях непрерывной функции).

Если точка y не принадлежит $[A, B]$, то вследствие строгой монотонности f она не может быть образом какой-либо точки $x\in[a, b]$. Этим доказано, что образ отрезка $[a, b]$ при помощи f есть отрезок $[A, B]$. То, что обратная определенная на $[A, B]$ функция $x=\varphi(y)$ однозначна и строго монотонна, следует непосредственно из строгой монотонности $y=f(x)$ на $[a, b]$. Остается доказать непрерывность функции $x=\varphi(y)$ в любой точке $y_0\in[A, B]$.

Пусть y_0 есть внутренняя точка $[A, B]$, т. е. $y_0 \in (A, B)$. Ей, мы уже знаем, соответствует единственная точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $y_0 = f(x_0)$ или $x_0 = \varphi(y_0)$.

Зададим положительное число $\varepsilon > 0$, которое будем считать настолько малым, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, и пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Из строгой монотонности f следует, что для любого $y \in (y_1, y_2)$ соответствующее значение $x = \varphi(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Таким образом, доказано, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ именно такого, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, можно подобрать окрестность (y_1, y_2) точки y_0 такую, что $|x - x_0| = |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_2)$.

Сформулированное здесь свойство функции $\varphi(y)$ доказано для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но тогда оно, очевидно, верно и для любых $\varepsilon > 0$. Это свойство выражает тот факт, что функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0.

Для концевой точки $y_0 = B$ соответствующая точка $x_0 = b = \varphi(y_0)$. Полагаем $x_1 = b - \varepsilon > a$, $y_1 = f(x_1)$ и тогда, очевидно, будет $|\varphi(y_0) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_0]$.

В этом же духе рассматривается случай $y_0 = A$.

Приведем еще другое доказательство непрерывности функции $x = \varphi(y)$ (обратной к функции $y = f(x)$, непрерывной и строго монотонной на $[a, b]$). Зададим $y_0 \in [A, B]$ и произвольную последовательность точек $y_n \in [A, B]$ такую, что $y_n \to y_0$. Положим $x_0 = \varphi(y_0)$, $x_n = \varphi(y_n)$. Тогда $y_0 = f(x_0)$, $y_n = f(x_n)$. Непрерывность φ в точке y_0 будет доказана, если мы покажем, что $x_n \to x_0$.

Допустим, что это не так. Тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к некоторой точке $x' \in [a, b]$, отличной от x_0. В силу строгой монотонности f тогда $f(x_0) \neq f(x')$.

Но по условию $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0)$, а в силу непрерывности f

$$f(x_{n_k}) \to f(x'), \quad x_{n_k} \to x'.$$

Мы получили противоречие, потому что одна и та же последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ не может стремиться к разным пределам.

Пример. Функция $y = \sin x$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Образом этого отрезка посредством функции $\sin x$ является отрезок $[-1, +1]$. На основании доказанной теоремы существует определенная на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ обратная к $\sin x$ однозначная непрерывная строго возрастающая функция $x = \arcsin y$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$.

Для функции $y = \sin x$, рассматриваемой на всей действительной оси, обратная функция, как известно, уже многозначна:

$$x = \operatorname{Arcsin} y = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1}$$

т. е. каждому $y \in [-1, +1]$ соответствует множество e_y значений x, определяемых формулой (1).

Теорема 2. *Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная строго возрастающая на интервале (a, b) функция и пусть*

$$A = \inf f(x), \qquad B = \sup f(x), \qquad x \in (a, b), \tag{2}$$

где, в частности, может быть a, $A = -\infty$, b, $B = +\infty$.

Тогда образ (a, b) есть интервал (A, B) и обратная к f функция $x = \varphi(y)$ однозначна, строго возрастает и непрерывна на (A, B).

Замечание. В этой теореме можно слова «возрастающая», «возрастает» заменить на «убывающая», «убывает», но тогда образ (a, b) будет (B, A).

Из определения числа B непосредственно следует, что если оно конечно, то точка $y > B$ не может принадлежать образу $f((a, b))$. Но и число B тоже не может принадлежать $f((a, b))$, иначе существовала бы точка $x_1 \in (a, b)$ такая, что $B = f(x_1)$, и так как на интервале (a, b) можно определить точку $x_2 > x_1$, то в силу строгой монотонности f мы получили бы $f(x_2) > B = f(x_1)$, что противоречит определению B.

Подобным образом доказывается, что и число A не принадлежит $f((a, b))$, если оно конечно. Итак, образ $f((a, b))$ принадлежит (A, B). Но на самом деле эти два множества совпадают. Действительно, пусть $y \in (A, B)$. Тогда в силу определений (2) должны найтись такие $x_1, x_2 \in (a, b)$, что

$$y_1 = f(x_1) < y < f(x_2) = y_2,$$

и вследствие строгого возрастания f должно быть $x_1 < x_2$. Но функция f непрерывна на (a, b), тем более на $[x_1, x_2]$, и когда x пробегает отрезок $[x_1, x_2]$, сама она должна пробегать все значения между y_1 и y_2, следовательно, и значение y.

Это значит, что существует значение $x = \varphi(y)$ (единственное в силу строгой монотонности f) такое, что $y = f(x)$. Этим доказано, что образ интервала (a, b) есть интервал (A, B) и что определенная выше функция $x = \varphi(y)$ есть обратная к f функция.

Функция φ непрерывна в точке y, потому что φ можно также рассматривать как обратную функцию к функции f, определенной на указанном отрезке $[x_1, x_2]$, а к этой последней можно применить предыдущую теорему. Тот факт, что φ строго возрастает, очевиден. Теорема доказана.

Примечание. В теореме 2 интервалы (a, b), (A, B) можно соответственно заменить на полуинтервалы, например, на $[a, b)$, $[A, B)$ и тогда a и A — конечные числа.

Пример. Рассмотрим $\sqrt[n]{a}$, где $a > 0$ и n — натуральное число. *Арифметическим значением корня n-й степени из a* называется положительное число, n-я степень которого равна a. Это число обозначается еще так:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}. \tag{3}$$

Существование и единственность этого числа вытекает из следующих соображений. Функция

$$y = x^n \tag{4}$$

непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$, и, кроме того, она равна нулю при $x = 0$ и стремится к $+\infty$ вместе с x. На основании теоремы 2 и примечания к ней функция $y = x^n$ имеет обратную однозначную и непрерывную функцию $x = \varphi(y)$ $(0 \leqslant y < \infty)$, строго возрастающую, равную нулю при $y = 0$ и стремящуюся к $+\infty$ вместе с y.

Таким образом, каково бы ни было $y \in [0, \infty)$, существует единственное положительное число $x = \varphi(y)$ такое, что $[\varphi(y)]^n = y$. Но тогда $\varphi(y) = y^{1/n}$.

В частности, если считать $y = a$, то мы доказали существование и единственность арифметического значения корня n-й степени из a $(a \geqslant 0)$.

§ 4.6. Показательная и логарифмическая функции

Функция a^x. Зададим положительное число $a > 0$. Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \ldots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a, а число $a^{1/n}$ — как арифметическое значение корня n-й степени из a.

Если теперь p/q $(q > 0)$ есть неотрицательная рациональная дробь, то, по определению, полагают

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p, \quad a^0 = 1.$$

Доказательство второго равенства в этой цепи и того факта, что это определение приводит к тому же числу, если дробь p/q будет записана в форме $np/nq = p/q$, где n — произвольное натуральное число, известно читателю из элементарной алгебры. Наконец, по определению, полагают

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}.$$

Этим определена функция a^x $(a > 0)$ для любых рациональных значений x.

Обозначим через Q множество всех рациональных чисел. Функция a^x определена на этом множестве. В курсе элементарной математики доказывается на основании только аксиом числа I — IV групп, что она удовлетворяет свойству:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \tag{1}$$

каковы бы ни были x, $y \in Q$. Там доказывается также неравенство $a^x < a^y$ $(x < y;\ x,\ y \in Q,\ a > 1)$.

Но функцию a^x можно доопределить на всех иррациональных точках так, что определенная таким образом на всей действительной оси R продолженная функция, которую естественно обозначить снова через a^x, будет непрерывной всюду на R. Больше того, для продолженной функции свойство (1) выполняется уже для всех x, $y \in R$.