Существование и единственность этого числа вытекает из следующих соображений. Функция

$$y = x^n \tag{4}$$

непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$, и, кроме того, она равна нулю при $x = 0$ и стремится к $+\infty$ вместе с x. На основании теоремы 2 и примечания к ней функция $y = x^n$ имеет обратную однозначную и непрерывную функцию $x = \varphi(y)$ $(0 \leqslant y < \infty)$, строго возрастающую, равную нулю при $y = 0$ и стремящуюся к $+\infty$ вместе с y.

Таким образом, каково бы ни было $y \in [0, \infty)$, существует единственное положительное число $x = \varphi(y)$ такое, что $[\varphi(y)]^n = y$. Но тогда $\varphi(y) = y^{1/n}$.

В частности, если считать $y = a$, то мы доказали существование и единственность арифметического значения корня n-й степени из a $(a \geqslant 0)$.

§ 4.6. Показательная и логарифмическая функции

Функция a^x. Зададим положительное число $a > 0$. Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \ldots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a, а число $a^{1/n}$ — как арифметическое значение корня n-й степени из a.

Если теперь p/q $(q > 0)$ есть неотрицательная рациональная дробь, то, по определению, полагают

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p, \quad a^0 = 1.$$

Доказательство второго равенства в этой цепи и того факта, что это определение приводит к тому же числу, если дробь p/q будет записана в форме $np/nq = p/q$, где n — произвольное натуральное число, известно читателю из элементарной алгебры. Наконец, по определению, полагают

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}.$$

Этим определена функция a^x $(a > 0)$ для любых рациональных значений x.

Обозначим через Q множество всех рациональных чисел. Функция a^x определена на этом множестве. В курсе элементарной математики доказывается на основании только аксиом числа I — IV групп, что она удовлетворяет свойству:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \tag{1}$$

каковы бы ни были x, $y \in Q$. Там доказывается также неравенство $a^x < a^y$ $(x < y;\ x, y \in Q,\ a > 1)$.

Но функцию a^x можно доопределить на всех иррациональных точках так, что определенная таким образом на всей действительной оси R продолженная функция, которую естественно обозначить снова через a^x, будет непрерывной всюду на R. Больше того, для продолженной функции свойство (1) выполняется уже для всех x, $y \in R$.

Начнем с того, что докажем вспомогательное неравенство (Бернулли *)).

Если $a > 1$ и N — натуральное, то $a^{1/N} = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$. Поэтому, учитывая формулу бинома Ньютона, получим

$$a = (1+\lambda)^N > 1 + N\lambda \text{ и } a^{1/N} - 1 < (a-1)/N.$$

Если теперь h есть произвольное положительное рациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < h \leqslant 1$, то можно подобрать такое натуральное N, что $1/(N+1) < h \leqslant 1/N$. Поэтому при $a > 1$

$$a^h - 1 \leqslant a^{1/N} - 1 < \frac{a-1}{N} = \frac{N+1}{N}(a-1)\frac{1}{N+1} < 2(a-1)h.$$

На основании неравенства Бернулли получим

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) \leqslant 2a^x(a-1)(y-x) \quad (x,\ y \in Q,\ 0 < y - x \leqslant 1). \tag{2}$$

Зададим произвольное положительное рациональное число c и введем новое множество Q_c, состоящее из всех $x \in Q$, которые удовлетворяют неравенству $x \leqslant c$.

Из (2) следует:

$$a^y - a^x \leqslant M(y-x) \quad (x,\ y \in Q_c,\ 0 < y - x \leqslant 1,\ M = 2(a-1)a^c), \tag{3}$$

где, таким образом, M есть константа, не зависящая от рассматриваемых x, y.

Следовательно,

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x-y| \qquad (x,\ y \in Q_c,\ |x-y| \leqslant 1). \tag{4}$$

Зададим произвольное действительное число $x = \pm\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ и положим

$$x^{(n)} = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $x \in Q_c$, то и $x^{(n)} \in Q_c$. Кроме того, $|x - x^{(n)}| \leqslant 10^{-n} < 1$, поэтому

$$\left|a^x - a^{x^{(n)}}\right| \leqslant M\left|x - x^{(n)}\right|,$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{x^{(n)}} = a^x. \tag{5}$$

Так как c может быть любым положительным рациональным числом, то мы доказали, что для всякого рационального числа x выполняется равенство (5).

Пусть теперь x есть иррациональное число, удовлетворяющее неравенству $x < c$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, то на основании критерия Коши существования предела для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|x^{(n)} - x^{(m)}| < \varepsilon/M \qquad (n,\ m > N). \tag{6}$$

Это показывает в силу (4), что имеет место неравенство

$$\left|a^{x^{(n)}} - a^{x^{(m)}}\right| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \qquad (n, m > N),$$

*) Я. Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

верное для любых указанных натуральных n, m. Но тогда последовательность чисел $\{a^{x^{(n)}}\}$ тоже удовлетворяет условию Коши: существует предел этой последовательности при $n \to \infty$. Этот предел обозначают символом a^x, т. е. пишут

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x^{(n)}}. \tag{7}$$

Итак, для любого действительного числа x выполняется равенство (7). Для рационального x это равенство доказано выше. Для иррационального x доказано только существование предела в правой части (7), а левая часть a^x считается равной правой по определению.

Пусть теперь x и y любые действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $x \leqslant c$, $y \leqslant c$, $|x - y| < 1/2$. Тогда при $n > 1$

$$x^{(n)} \leqslant c,\ y^{(n)} < c,$$

$$|x^{(n)} - y^{(n)}| \leqslant |x^{(n)} - x| + |x - y| + |y - y^{(n)}| \leqslant 2\cdot 10^{-n} + \frac{1}{2} < 1$$

и

$$|a^{x^{(n)}} - a^{y^{(n)}}| \leqslant M|x^{(n)} - y^{(n)}| \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

Перейдем в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Так как при этом $x^{(n)} \to x$, $y^{(n)} \to y$, $a^{x^{(n)}} \to a^x$, $a^{y^{(n)}} \to y$ и функция $|x|$ непрерывна, то получим

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x - y| \tag{9}$$

при $0 < |x - y| < 1/2$. Из неравенства (9) непосредственно следует, что функция a^x непрерывна для любого $x < c$, следовательно, и для любого x, потому что c можно считать произвольным.

Имеют место свойства

$$a^x < a^y, \text{ если } x < y, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \tag{11}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{12}$$

Чтобы доказать эти свойства, будем исходить из того, что для рациональных x, y они известны из школьного курса элементарной алгебры.

Пусть λ и μ — постоянные рациональные числа такие, что $x < \lambda < \mu < y$, и пусть x_n, $y_n \in Q$ — переменные такие, что $x_n \to x$, возрастая, и $y_n \to y$, убывая. Тогда $a^{x_n} < a^\lambda < a^\mu < a^{y_n}$, а после перехода к пределу $a^x \leqslant a^\lambda < a^\mu \leqslant a^y$, и мы получили (10). Свойства (11) следуют из того, что это верно в случае, когда $x \to -\infty$, или $x \to +\infty$, пробегая рациональные значения, и из доказанной уже монотонности (см. (10)). Наконец, (12) следует из равенства $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n}$ после перехода в нем к пределу.

До сих пор мы считали $a > 1$. Если $0 < a < 1$, то полагаем

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{13}$$

В этом случае свойство (12) функции a^x и ее непрерывность сохранятся, но теперь уже она будет строго убывать. Наконец, полагаем

$$1^x = 1 \tag{14}$$

для всех x.

Отметим еще, что при натуральном m

$$a^{xm}=a^{x}a^{(m-1)x}=(a^{x})^{2}a^{(m-2)x}=\ldots=(a^{x})^{m},$$
$$(a^{x/m})^{m}=a^{x} \quad \text{и} \quad a^{x/m}=(a^{x})^{1/m},$$

поэтому для рационального числа $p/q>0$

$$(a^{x})^{p/q}=(a^{x})^{(1/q)p}=(a^{x/q})^{p}=a^{x(p/q)}.$$

Далее, если y — произвольное положительное число, и $y_n\to y$, где y_n — рациональные, то

$$a^{xy}=\lim_{n\to\infty}a^{xy_n}=\lim_{n\to\infty}(a^{x})^{y_n}=(a^{x})^{y},$$

и мы доказали, что $a^{xy}=(a^{x})^{y}$ пока для $y>0$. На основании (12) это равенство, очевидно, распространяется на случай произвольного y (ведь $a^{-y}a^{y}=a^{y-y}=a^{0}=1$).

Функция $\lg_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$). Пусть для определенности $a>1$. Тогда $y=a^{x}$ есть функция непрерывная и строго возрастающая на всей действительной оси. При этом

$$\inf_{x\in(-\infty,+\infty)}a^{x}=0,\qquad \sup_{x\in(-\infty,+\infty)}a^{x}=+\infty.$$

Таким образом, функция a^{x} отображает действительную ось $(-\infty,+\infty)$ на открытую полуось $(0,\infty)$, и обратная к ней функция по теореме 2 § 4.5 однозначна, строго возрастает и непрерывна на $(0,\infty)$. Эта функция называется *логарифмом y при основании a* и обозначается так:

$$\lg_a y.$$

Из сказанного следует, что (мы заменяем y на x)

$$\lim_{x\to+\infty}\lg_a x=+\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\lg_a x=-\infty.$$

При $a<1$ рассуждения аналогичны. Функция a^{x} также отображает действительную ось $(-\infty,+\infty)$ на полуось $(0,+\infty)$, но строго убывая. Обратная функция $\lg_a x$, определенная на $(0,+\infty)$, также будет строго убывать, и теперь

$$\lim_{x\to\infty}\lg_a x=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\lg_a x=+\infty.$$

Имеют место тождества ($a\neq 1$, $a>0$)

$$a^{\lg_a x}=x\quad (0<x<+\infty),\qquad \lg_a a^{x}=x\quad (-\infty<x<+\infty).$$

Отсюда на основании свойств функции a^{x} при x, $y>0$ имеем

$$a^{\lg_a(xy)}=xy=a^{\lg_a x}a^{\lg_a y}=a^{\lg_a x+\lg_a y}$$

и

$$\lg_a(xy)=\lg_a x+\lg_a y.$$

Если в этом равенстве заменить x на x/y, то получим

$$\lg_a x - \lg_a y = \lg_a \frac{x}{y}.$$

Далее,

$$a^{\lg_a x^y} = x^y = \left(a^{\lg_a x}\right)^y = a^{y \lg_a x} \quad (x > 0),$$

поэтому

$$\lg_a x^y = y \lg_a x \quad (a \neq 1,\ a > 0,\ x > 0).$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\lg_a b \cdot \lg_b a} = \left(a^{\lg_a b}\right)^{\lg_b a} = b^{\lg_b a} = a$$

и, следовательно,

$$\lg_a b \cdot \lg_b a = 1.$$

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\lg_e a = \ln a$.

§ 4.7. Степенная функция x^b

Здесь b — постоянная, а x — переменная. При любом b эта функция во всяком случае определена на положительной полуоси $x > 0$ (ведь в § 4.6 мы обосновали определение числа a^x, где $a > 0$ и x произвольно).

Имеет место формула (см. § 4.6)

$$x^b = e^{b \lg x} \quad (x > 0), \tag{1}$$

с помощью которой свойства степенной функции можно вывести из известных уже нам свойств показательной и логарифмической функций. Очевидно, x^b есть непрерывная функция. При $b > 0$ она строго возрастает и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty.$$

При $b > 0$ естественно считать, что $0^b = 0$; тогда функция x^b делается непрерывной справа в точке $x = 0$.

При $b < 0$ функция x^b непрерывна и строго убывает на положительной полуоси и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = 0.$$

Формула (1) влечет характеристическое свойство степенной функции:

$$(xy)^b = x^b y^b \quad (x, y > 0).$$