

Если в этом равенстве заменить x на x/y , то получим

$$\lg_a x - \lg_a y = \lg_a \frac{x}{y}.$$

Далее,

$$a^{\lg_a x^y} = x^y = (a^{\lg_a x})^y = a^{y \lg_a x} \quad (x > 0),$$

поэтому

$$\lg_a x^y = y \lg_a x \quad (a \neq 1, a > 0, x > 0).$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\lg_a b \cdot \lg_b a} = (a^{\lg_a b})^{\lg_b a} = b^{\lg_b a} = a$$

и, следовательно,

$$\lg_a b \cdot \lg_b a = 1.$$

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\lg_e a = \ln a$.

§ 4.7. Степенная функция x^b

Здесь b — постоянная, а x — переменная. При любом b эта функция во всяком случае определена на положительной полуоси $x > 0$ (ведь в § 4.6 мы обосновали определение числа a^x , где $a > 0$ и x произвольно).

Имеет место формула (см. § 4.6)

$$x^b = e^{b \lg x} \quad (x > 0), \quad (1)$$

с помощью которой свойства степенной функции можно вывести из известных уже нам свойств показательной и логарифмической функций. Очевидно, x^b есть непрерывная функция. При $b > 0$ она строго возрастает и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^b = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty.$$

При $b > 0$ естественно считать, что $0^b = 0$; тогда функция x^b делается непрерывной справа в точке $x = 0$.

При $b < 0$ функция x^b непрерывна и строго убывает на положительной полуоси и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^b = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = 0.$$

Формула (1) влечет характеристическое свойство степенной функции:

$$(xy)^b = x^b y^b \quad (x, y > 0).$$

На рис. 4.12 и рис. 4.11, 4.12 приведены графики функции x^b $x > 0$ для нескольких положительных и отрицательных значений b .

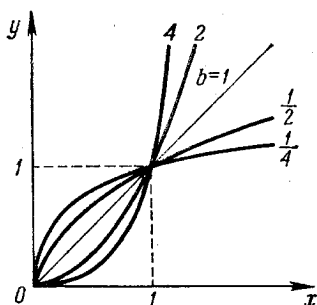


Рис. 4.11.

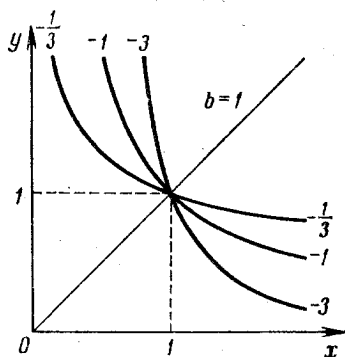


Рис. 4.12.

Степенная функция x^b имеет смысл как действительная функция и для отрицательных x , если b — целое или рациональное p/q , где q — нечетное.

§ 4.8. Еще о числе e

В § 3.5 рассматривалась функция

$$\alpha(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

от целого аргумента n , и было показано, что если $n \rightarrow \infty$, пробегая натуральные числа, то $\alpha(n)$ стремится к пределу, который был назван числом e . Но функция $\alpha(n)$ определена на самом деле для произвольных, действительных значений n , исключая $n \in (-1, 0]$. Мы покажем, и это важно для приложений, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = e, \quad (1)$$

где предел понимается как предел функции $\alpha(n)$, определенной для указанных n .

Чтобы доказать (1), достаточно убедиться в том, что (1) верно в двух случаях: когда $n \rightarrow +\infty$ и когда $n \rightarrow -\infty$, пробегая не обязательно целые значения.

Если n — положительное действительное число и $[n]$ — его целая часть, то $n < [n] + 1 \leq n + 1$ и очевидно, что

$$\left(1 + \frac{1}{[n] + 1}\right)^{[n] + 1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + 1} < \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^{[n] + 2} < e \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2.$$

При $n \rightarrow +\infty$, очевидно, $[n], [n] + 1 \rightarrow +\infty$, откуда первый и