На рис. 1.2 и рис. 4.11, 4.12 приведены графики функции x^b $x>0$ для нескольких положительных и отрицательных значений b.

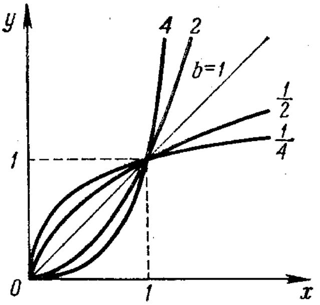

Рис. 4.11.

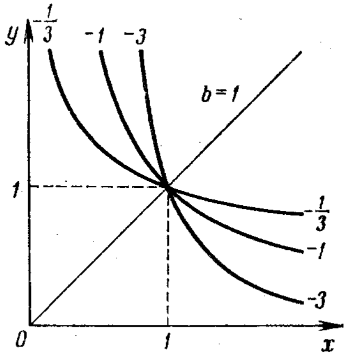

Рис. 4.12.

Степенна́я функция x^b имеет смысл как действительная функция и для отрицательных x, если b — целое или рациональное p/q, где q — нечетное.

§ 4.8. Еще о числе e

В § 3.5 рассматривалась функция

$$\alpha(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

от целого аргумента n, и было показано, что если $n \to \infty$, пробегая натуральные числа, то $\alpha(n)$ стремится к пределу, который был назван числом e. Но функция $\alpha(n)$ определена на самом деле для произвольных, действительных значений n, исключая $n \in \in (-1, 0]$. Мы покажем, и это важно для приложений, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = e, \tag{1}$$

где предел понимается как предел функции $\alpha(n)$, определенной для указанных n.

Чтобы доказать (1), достаточно убедиться в том, что (1) верно в двух случаях: когда $n \to +\infty$ и когда $n \to -\infty$, пробегая не обязательно целые значения.

Если n — положительное действительное число и $[n]$ — его целая часть, то $n < [n] + 1 \leqslant n + 1$ и очевидно, что

$$\left(1 + \frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^{[n]+2} < e\left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2.$$

При $n \to +\infty$, очевидно, $[n]$, $[n] + 1 \to +\infty$, откуда первый и последний члены цепи стремятся к e. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e \ (n \to +\infty),$$

и так как при этом

$$1+\frac{1}{n} \to 1,$$

то мы доказали (1). Пока для $n \to +\infty$.

Если теперь $n \to -\infty$, то $m = -n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m} =$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e,$$

т. е. доказано (1) и при $n \to -\infty$. Но тогда верно (1).

Полагая $h = 1/n$, получим еще

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

§ 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Целью этого параграфа является доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Функция $\psi(x) = (\sin x)/x$ определена для всех значений $x \neq 0$.

Пусть $0 < x < \pi/2$; тогда (рис. 4.13) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, потому что половина хорды, стягивающей дугу окружности, меньше половины дуги, которая в свою очередь меньше половины длины, объемлющей дугу ломаной. Тогда $1 < x/(\sin x) < 1/(\cos x)$, или

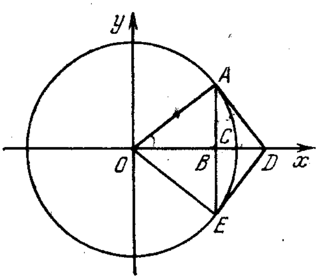

Рис. 4.13.

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2}$$

Эти неравенства, очевидно, верны не только для положительных, но и для отрицательных x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x| < \pi/2$, в силу четности входящих в (2) функций.

Функция $\cos x$ непрерывна (см. § 4.2, пример 6), поэтому

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$