последний члены цепи стремятся к e. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e \ (n \to +\infty),$$

и так как при этом

$$1+\frac{1}{n} \to 1,$$

то мы доказали (1). Пока для $n \to +\infty$.

Если теперь $n \to -\infty$, то $m = -n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m =$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e,$$

т. е. доказано (1) и при $n \to -\infty$. Но тогда верно (1).

Полагая $h = 1/n$, получим еще

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

§ 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Целью этого параграфа является доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

Функция $\psi(x) = (\sin x)/x$ определена для всех значений $x \neq 0$.

Пусть $0 < x < \pi/2$; тогда (рис. 4.13) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, потому что половина хорды, стягивающей дугу окружности, меньше половины дуги, которая в свою очередь меньше половины длины, объемлющей дугу ломаной. Тогда $1 < x/(\sin x) < 1/(\cos x)$, или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2)$$

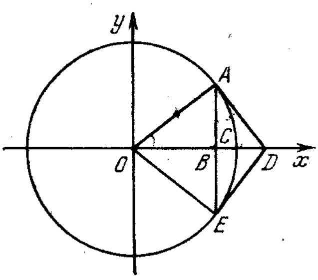

Рис. 4.13.

Эти неравенства, очевидно, верны не только для положительных, но и для отрицательных x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x| < \pi/2$, в силу четности входящих в (2) функций.

Функция $\cos x$ непрерывна (см. § 4.2, пример 6), поэтому

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Перейдем в соотношениях (2) к пределу при $x \to 0$. Пределы левой и правой частей (2) равны 1, поэтому существует и притом равный 1 предел средней части (2).

§ 4.10. Порядок переменной, эквивалентность (асимптотика)

Говорят, что f *на множестве точек* E *имеет порядок* φ или еще f *есть* O *большое от* φ *на* E и пишут при этом

$$f(x) = O(\varphi(x)) \text{ на } E, \tag{1}$$

если

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)| \text{ на } E, \tag{2}$$

где C — не зависящая от x положительная константа.

В частности,

$$f(x) = O(1) \text{ на } E$$

обозначает тот факт, что f на E ограничена.

Очевидно, если $f(x) = O(\varphi_1(x))$ на E и $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ на E, то $f(x) = O(\varphi_2(x))$ на E.

Примеры.

1. $\sin x = O(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.
2. $x = O(x^2)$ на $[1, \infty]$ (но не на $[0, 1]$); при этом x^2 и x здесь переставить местами, очевидно, нельзя. С другой стороны, $x^2 = O(x) = O(1)$ на $[0, 1]$.

Мы будем писать

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \to a) \tag{3}$$

и говорить, что *функция* f есть *о малое от* φ *при* $x \to a$, если

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x), \tag{3'}$$

где функция $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to a)$.

Мы также будем писать

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \to a), \tag{4}$$

если существует окрестность $U(a)$ точки a (конечной и бесконечной) такая, что

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \in U(a),\ x \neq a). \tag{4'}$$

Само собой разумеется, что определение (3), так же как и (4), предполагает, что обе функции f и φ определены на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Если на некоторой такой окрестности (исключая точку a) $\varphi(x) \neq 0$, то определения (3) и (4), очевидно, эквивалентны следующим: говорят, что f *есть о малое от* φ *при* $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \tag{5}$$