Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5.1. Производная

Перед чтением этой главы мы рекомендуем читателю прочесть еще раз § 1.5, где говорилось о том, как возникает понятие производной. А сейчас мы начинаем сразу с формального определения производной.

Производной от функции f в точке x называется предел, к которому стремится отношение ее приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Заметим, что при фиксированном x величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть вполне определенная функция от Δx:

$$\psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если функция f определена в некоторой окрестности точки x, то функция $\psi(\Delta x)$ определена для достаточно малых, не равных нулю Δx, т. е. для Δx, удовлетворяющих неравенству $0 < |\Delta x| < \delta$, где δ достаточно малое положительное число. При $\Delta x = 0$ она заведомо не определена. Вопрос о существовании производной функции f в точке x эквивалентен вопросу о существовании предела функции $\psi(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования конечного предела (1) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

А это последнее равенство выражает, что функция f в точке x непрерывна.

Утверждение обратное теореме 1 не верно: если функция f непрерывна в точке x, то отсюда не следует, что она имеет производную в этой точке (см. ниже).

Говорят, что f *имеет в точке x бесконечную производную, равную $+\infty$ или $-\infty$* (случай ∞ исключается), если в этой точке $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ или соответственно $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$.

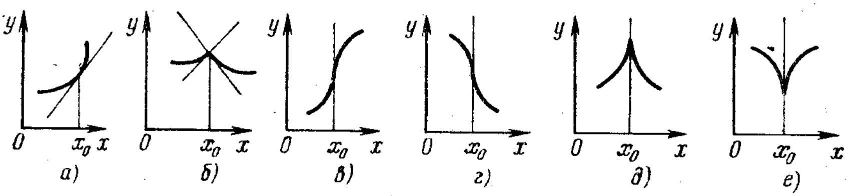

Рис. 5.1.

Наконец, введем понятия *правой* и *левой производной от f в точке x*:

$$f'_+(x)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\psi(0+0),\quad f'_-(x)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\psi(0-0).$$

Для того чтобы существовала производная $f'(x)$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы существовали производные от f в точке x справа и слева и были равны между собой и тогда автоматически они равны $f'(x)$.

Это утверждение верно также, если в нем термин «производная» заменить на «бесконечная производная».

Функция, изображенная на рис. 5.1, *а*, имеет производную в точке x_0 — график в этой точке имеет (см. § 1.5) касательную (единственную). Функция, изображенная на рис. 5.1, *б*, не имеет производной, но существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, не равные друг другу. Функции, изображенные на рис. 5.1, *в*, *г*, имеют бесконечные производные $f'(x_0)=+\infty$ и $f'(x_0)=-\infty$ соответственно, а функции на рис. 5.1, *д* и *е* не имеют производной в точке x_0. В случае рис. 5.1, *д* $f'_-(x_0)=+\infty$, $f'_+(x_0)=-\infty$, а в случае рис. 5.1, *е* $f'_-(x_0)=-\infty$, $f'_+(x_0)=+\infty$.

Надо иметь в виду, что производная от функции в точке x есть функция от x. С этой точки зрения обозначение $f'(x)$ является весьма удобным, $f'(a)$ обозначает число — производную от функции f в точке a.

В § 1.5 были выведены формулы (1) — (4) производной от x^n ($n = 0, 1, \ldots$), $\sin x$ и $\cos x$. Ниже выводится производная от показательной функции a^x ($a > 0$):

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} =$$
$$= a^x \lim_{z \to 0} \frac{z}{\lg_a (1 + z)} = a^x \frac{1}{\lim\limits_{z \to 0} \lg_a (1 + z)^{1/z}} =$$
$$= \frac{a^x}{\lg_a e} = a^x \ln a. \qquad (2)$$

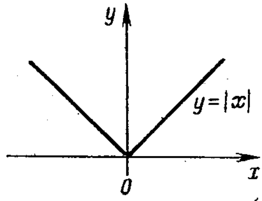

Рис. 5.2.

Здесь мы воспользовались подстановкой $a^h - 1 = z \to 0$ $(h \to 0)$ и тем фактом, что функция $\lg_a u$ для $u > 0$, в частности, при $u = e$, непрерывна.

Если в последнем равенстве положить $a = e$, то получим

$$(e^x)' = e^x. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию (рис. 5.2)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \to \begin{cases} 1 & (h > 0,\ h \to 0), \\ -1 & (h < 0,\ h \to 0). \end{cases}$$

Производная от $|x|$ в точке $x = 0$ не существует, потому что правая производная в этой точке отлична от левой; в остальных точках производная от $|x|$ существует и равна

$$|x|' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Из рассмотрения графика видно, что функция $|x|$ непрерывна для любого x, в том числе и в точке $x = 0$. Это видно также из следующих выкладок:

$$||x + h| - |x|| \leqslant |x + h - x| = |h| \to 0 \quad (h \to$$

Функция $|x|$ интересна тем, что она непрерывна для любого x, но имеется такое значение x, именно $x = 0$, для которого она не имеет производной. В точке $x = 0$ графика этой функции не существует касательной.

Пример функции $|x|$ показывает, что обратное теореме 1 утверждение неверно.

В математике известны примеры функций f, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и не имеющих производной ни в одной точке этого отрезка (функция Вейерштрасса). Их графики невозможно нарисовать, но они могут быть заданы с помощью некоторых формул. Эти примеры мы не приводим здесь.

Пример 1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для рациональных } x, \\ x^2 & \text{для иррациональных } x \end{cases}$$

разрывна во всех точках $x \neq 0$, но в точке $x = 0$ имеет производную $f'(0) = 0$, потому что для h рациональных $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{0 - 0}{h} = 0$ и для h иррациональных $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 - 0}{h} = h \to 0 \ (h \to 0)$.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на $(-\infty, \infty)$; для всех $x \neq 0$ она имеет производную, но в точке $x = 0$ она не имеет даже правой производной и левой, потому что величина $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \sin \dfrac{1}{h}$ не имеет предела, когда $h \to 0$, оставаясь положительным или отрицательным

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что $v(x) \neq 0$) имеют производные и справедливы равенства

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{4}$$

$$(uv)' = uv' + u'v, \tag{5}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{6}$$

Доказательство (4) приведено в § 1.5. Докажем (5), (6). Придадим независимой переменной x приращение Δx. Пусть соответствующие приращения u и v будут Δu и Δv. Тогда

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta (uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = uv' + vu',$$

потому что из того, что v имеет производную, следует, что она непрерывна, т. е. что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В частности, если C — постоянная, то $(Cu)' = Cu' + C'u = Cu'$, потому что $C' = 0$.

Докажем (6):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Несколько основных формул дифференцирования

1. $$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x\cdot 1' - 1\cdot x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \qquad (x \neq 0).$$

Более общая формула

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n\cdot 1' - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} \qquad (n = 1,\ 2\ldots;\ x \neq 0).$$

Таким образом, справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{7}$$

обобщающая формулу § 1.5 (1) на любые целые n.

Дальше мы увидим, что она остается верной и для нецелых n.

2. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{8}$$

3. $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{9}$$

§ 5.2. Дифференциал функции

Если функция f имеет в точке x производную, то существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x; \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0 \tag{1}$$

или

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{1'}$$

Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то равенство (1) можно записать следующим образом:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{2}$$

Говорят, что функция f *дифференцируема в точке* x, если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде (2), где A — некоторая константа, не зависящая от Δx (но вообще зависящая от x).