Пример 3. Из равенства $1+x^2+\ldots+x^{2m}=(1-x^{2m+2})/(1-x^2)$ и того факта, что $x^{2m+2}/(1-x^2)=o(x^{2m})$ $(x\to 0)$, следует, что

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+\ldots+x^{2m}+o\left(x^{2m}\right)\quad (x\to 0). \tag{19}$$

Но тогда (19) есть формула Тейлора функции $(1-x^2)^{-1}$ по степеням x с остаточным членом в форме Пеано.

§ 5.10. Формулы Тейлора для важнейших элементарных функций

Функция $f(x)=e^x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0)=1,\quad f^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому формула Тейлора по степеням x функции e^x с остатком, в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}\quad (0<\theta<1).$$

Если положить в ней $x=1$, то получим приближенное выражение для e:

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$$

с ошибкой $|R_n(1)|\leqslant\frac{1}{n!}e<\frac{3}{n!}$.

При любом $x\geqslant 0$

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{x^n}{n!}e^x\to 0\qquad (n\to\infty)$$

и при $x<0$

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}\to 0\qquad (n\to\infty).$$

Функция $f(x)=\sin x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\qquad (n=1,2,\ \ldots).$$

Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом Лагранжа имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{n!}+\ldots+(1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}+R_{2\nu+1}(x),$$

$$R_{2\nu+1}(x)=\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\sin\left(\theta x+(2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток стремится к нулю при $\nu \to \infty$ для любого x:

$$|R_{2\nu+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Функция $f(x) = \cos x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{x^{2(\nu-1)}}{(2(\nu-1))!} + R_{2\nu}(x),$$

$$R_{2\nu}(x) = \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \cos\left(\theta x + 2\nu\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток ведет себя как и в случае $\sin x$:

$$|R_{2\nu}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2\nu}}{(2\nu)!} \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Особенно хорошо стремится к нулю остаток функций $\sin x$ и $\cos x$ при $|x| \leqslant 1$. Заметим, что численные значения этих функций как раз достаточно знать для дуг x в пределах между числом 0 и числом $\pi/4 < 1$.

Функция $f(x) = \ln(1 + x)$ определена и сколько угодно раз дифференцируема для $x > -1$. Ее формулу Тейлора по степеням x можно написать для $n = 1, 2, \ldots$ при $x > -1$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x).$$

При этом для остатка запишем две формы — форму Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+\theta x)^n} \quad (0 < \theta < 1)$$

и форму Коши:

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$; тогда, обращаясь к форме Лагранжа, получим $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} x^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Мы видим, что при $0 < x < 1$

остаток стремится к нулю быстро, при $x = 1$ стремление к нулю происходит очень медленно.

В случае $-1 < x < 0$ форма Лагранжа не дает возможности сделать определенное заключение о стремлении R_n к нулю, потому что мы знаем только, что θ удовлетворяет неравенствам $0 < \theta < 1$. При этом не надо забывать, что θ зависит от x и n. Но, применяя форму Коши, получим, считая, что $0 < |x| < 1$, оценку

$$|R_n| < \frac{|x|^n}{1 - |x|} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

потому, что $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < \dfrac{1-\theta}{1-\theta} = 1$.

При $x = -1$ $\ln(1+x)$ не имеет смысла. При $x > 1$ формула при любом n имеет смысл, однако ее остаточный член $R_n(x)$ теперь уже не стремится к нулю при $n \to \infty$. В этом можно убедиться *), рассуждая следующим окольным путем. Положим

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

Тогда

$$S_n(x) + R_n(x) = S_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$$

и

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Для $x > 1$ и $n \to \infty$ правая часть этого равенства не стремится к нулю. Поэтому $R_n(x)$ при $n \to \infty$ не может стремиться к нулю — не выполняется критерий Коши существования предела.

Итак, остаточный член формулы Тейлора функции $\ln(1+x)$ по степеням x стремится при $n \to \infty$ к нулю только при x, удовлетворяющих неравенствам $-1 < x \leqslant 1$.

Функция $f(x) = (1+x)^m$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Формула Тейлора по степеням x имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \\ + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(x).$$

При этом остаток в форме Лагранжа записывается так:

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n (1+\theta x)^{m-n},$$

*) Это следует также из расходимости при $|x| > 1$ ряда с общим членом $(-1)^n x^{n-1}/(n-1)$ (см. § 11.1).

а в форме Коши

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n (1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

При натуральном m и любом x все члены формулы, начиная с $(m+1)$-го, исчезают и формула Тейлора превращается в элементарную формулу Ньютона (см. § 5.9, (6)).

Для остальных m формула имеет смысл, во всяком случае при $x > -1$.

Пусть $0 \leqslant x < 1$. Тогда, если воспользоваться формулой Лагранжа, получим для $n > m$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|m(m-1)\ldots(m-n+1)|}{n!} x^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(см. ниже замечание).

Если же $-1 < x < 0$, то, воспользовавшись формулой Коши, получим (см. ниже замечание)

$$|R_n(x)| \leqslant C \frac{|m(m-1)|\ldots(m-n+1)|}{(n-1)!} |x|^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

где C — число, вообще зависящее от x, но не зависящее от n, потому что $((1-\theta)/(1+\theta x))^{n-1} \leqslant ((1-\theta)/(1-\theta))^{n-1} = 1$ и при $m-1 > 0$

$$(1+\theta x)^{m-1} \leqslant 2^{m-1},$$

а при $m-1 < 0$

$$(1+\theta x)^{m-1} < \frac{1}{(1-|x|)^{1-m}}.$$

Таким образом, остаточный член формулы Тейлора функции $(1+x)^m$ при $-1 < x < 1$ стремится к нулю при $n \to \infty$. При $x > 1$ остаточный член уже не стремится к нулю *), так как, если обозначать через $S_n(x)$ сумму первых n членов разложения $(1+x)^m$, то получим (см. ниже замечание)

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - S_n(x) =$$
$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

и для $R_n(x)$ не выполняется условие Коши существования предела.

Случаи $x = \pm 1$ мы не рассматриваем. Скажем только, что в этих случаях остаточный член R_n может стремиться и не стремиться к нулю при $n \to \infty$ в зависимости от m. При $m < 0$ и $x = -1$ функция $(1+x)^m$ вообще не имеет смысла.

---

*) Это следует также из расходимости ряда при $x > 1$ с общим членом $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$ (см. § 11.1).

Замечание. Для

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

где m — произвольное действительное число, имеет место

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|m-n|}{n+1}|x| \to |x|, \quad n \to \infty.$$

Но тогда, как докажет это читатель, при $n \to \infty$

$$u_n \to 0, \text{ если } |x| < 1, \quad u_n \to \infty, \text{ если } |x| > 1$$

(впрочем, см. § 11.3, теорема 2).

§ 5.11. Ряд Тейлора

Выражение

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{1}$$

где u_k — числа, зависящие в силу некоторого закона от натурального индекса k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), называется *рядом*.

Обозначим через $S_n = \sum\limits_0^{n-1} u_k$ сумму его первых n членов. Числа S_n составляют последовательность $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$. Если она сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (1) *сходится и имеет сумму, равную* S. При этом пишут $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$

Если функция f имеет в некоторой окрестности точки a производные сколь угодно высокого порядка, то для нее чисто формально можно написать ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots, \tag{2}$$

который носит название *ряда Тейлора функции f по степеням* $(x-a)$. Для данных значений a и x он может сходиться или расходиться. Особенно важен тот случай, когда ряд Тейлора функции f сходится к самой функции, т. е. имеет суммой $f(x)$.

Это имеет место тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_0^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) = S_n(x) + R_n(x) \tag{3}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то из (3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$