Замечание. Для

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

где m — произвольное действительное число, имеет место

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|m-n|}{n+1}|x| \to |x|, \quad n\to\infty.$$

Но тогда, как докажет это читатель, при $n\to\infty$

$$u_n \to 0, \text{ если } |x|<1, \quad u_n\to\infty, \text{ если } |x|>1$$

(впрочем, см. § 11.3, теорема 2).

§ 5.11. Ряд Тейлора

Выражение

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots, \tag{1}$$

где u_k — числа, зависящие в силу некоторого закона от натурального индекса k ($k=0, 1, 2, \ldots$), называется *рядом*.

Обозначим через $S_n = \sum\limits_0^{n-1} u_k$ сумму его первых n членов. Числа S_n составляют последовательность $\{S_n\}=\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$. Если она сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (1) *сходится и имеет сумму, равную* S. При этом пишут $S=u_0+u_1+u_2+\ldots$

Если функция f имеет в некоторой окрестности точки a производные сколь угодно высокого порядка, то для нее чисто формально можно написать ряд

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots, \tag{2}$$

который носит название *ряда Тейлора функции* f *по степеням* $(x-a)$. Для данных значений a и x он может сходиться или расходиться. Особенно важен тот случай, когда ряд Тейлора функции f сходится к самой функции, т. е. имеет суммой $f(x)$.

Это имеет место тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_0^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) = S_n(x)+R_n(x) \tag{3}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, то из (3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$

и так как $S_n(x)$ есть сумма первых n членов ряда (2), то ряд (2) сходится и имеет своей суммой $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots \tag{4}$$

Обратно, если известно, что для некоторого значения x имеет место равенство (4), т. е. если известно, что ряд (2) при этом значении x сходится и имеет своей суммой число $f(x)$, то это значит, что для указанного значения

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Но тогда из (3) следует, что $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$.

На основании результатов, которые были получены в предыдущем параграфе, мы можем теперь сказать, что имеют место следующие разложения в ряды Тейлора:

$$\left.\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad (-\infty < x < \infty),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad (-\infty < x < \infty),\\
(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \\
&\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \quad (-1 < x < 1),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В приведенных примерах множества E точек x, где ряды Тейлора по степеням x сходятся, представляют собой интервал или полуинтервал с центром в 0. Это не случайные факты. В дальнейшем будет выяснено, что ряд вида (см. § 11.11)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots, \tag{6}$$

где a_k — заданные постоянные числа, обладает тем свойством, что если он сходится в точке x_1, то он заведомо сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$. Ряды вида (6) называются *степенными рядами*.

Бывают и такие случаи, что для функции f можно формально написать ее ряд Тейлора по степеням $(x-a)$.

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots, \tag{7}$$

иначе говоря, для этой функции имеют смысл производные $f^{(k)}(a)$

для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ и ряд (7) сходится для некоторых значений x, однако сумма ряда для этих x не равна $f(x)$.

Пример 1. Вот пример такой функции:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \tag{8}$$

Если $|x| < 1$, $u = 1 - x^2$, то

$$\psi'(x) = -2x(1-x^2)^{-2} e^{1/(x^2-1)} = -2xu^{-2}e^{-1/u} \to 0, \quad x \to 1.$$

По индукции доказывается, что для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\psi^{(k)}(x) = P(x)(1-x^2)^{-l} e^{1/(x^2-1)} = P(x)\,u^{-l}e^{-1/u} \to P(1)\cdot 0 = 0.$$
$$x < 1, \quad x \to 1,$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен, а число $l > 0$ зависит от k. Если учесть, что $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, то мы доказали, что $\lim\limits_{x\to 1} \psi^{(k)}(x) = 0$. Далее, $\psi(1) = 0$, и если уже установлено, что $\psi^{(k)}(1) = 0$ при некотором k, то

$$\psi^{(k+1)}(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\psi^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \psi^{(k+1)}(1 + \theta(x-1)) = 0 \quad (0 < \theta < 1).$$

Итак, для функции ψ имеют смысл равные нулю числа $\psi(1)$, $\psi'(1)$, $\psi''(1)$, ... и можно написать ее ряд Тейлора по степеням $x - 1$. Все его члены при любом x равны нулю. Он, таким образом, сходится, и его сумма для любого x равна нулю, но отлична от $\psi(x)$ для $|x| < 1$. Аналогичные факты имеют место при $x = -1$.

Функция ψ есть пример бесконечно дифференцируемой на действительной оси функции, равной нулю вне некоторого отрезка.

Функции $f(x)$, разлагающиеся в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$, сходящийся к $f(x)$ в некоторой окрестности точки a, называются *аналитическими во всех точках указанной окрестности (открытой). В частности, они аналитические в точке a.*

Из сказанного выше следует, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ — аналитические на всей действительной оси, а функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ — аналитические на интервале $(-1, +1)$.

Можно показать (см. ниже пример 2), что, каково бы ни было $a > 0$, функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ разлагаются в сходящийся к ним ряд Тейлора по степеням $(x-a)$ для достаточно малых $x-a$, откуда следует, что функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ на самом деле аналитические при любом $x > 0$. Аналитические функции изучаются в специальной математической дисциплине — теории функций комплексного переменного, называемой также теорией аналитических функций.

Возможна следующая классификация функций, заданных на интервале. Функции:

1) произвольные, вообще разрывные;
2) непрерывные;
3) имеющие производную $f^{(n)}$ для некоторого $n = 1, 2, 3, \ldots$;

4) имеющие непрерывную производную $f^{(n)}$ для некоторого $n=1, 2, \ldots$;

5) бесконечно дифференцируемые, т. е. имеющие производную $f^{(n)}$ любого порядка, таким образом, имеющие непрерывную производную $f^{(n)}$ любого порядка;

6) аналитические.

Каждый следующий класс в этом ряду содержится в предыдущем и состоит из более «хороших» функций.

Функция, определенная равенствами (8), бесконечно дифференцируема на $(-\infty, \infty)$, но не является аналитической на нем. Впрочем, она аналитическая на $(1, \infty)$, $(-\infty, 1)$ и на $(-1, 1)$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \ln x$. Тогда

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} \quad (x>0;\ k=1, 2, \ldots),$$

$$\ln x = \ln a + \sum_{1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(x-a)^k}{ka^k} + R_n(x), \qquad a>0,$$

где $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \dfrac{(x-a)^n}{(a+\theta(x-a))^n}$, $|x-a|<a$. Если $|x-a|<a/2$, то тогда $|a+\theta(x-a)| > a-|x-a| > a-(a/2) = a/2$, $|(x-a)/(a+\theta(x-a))| < 1$ и $|R_n(x)| < 1/n \to 0$.

Таким образом, имеет место разложение в сходящийся ряд

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{1\cdot a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} + \ldots$$

для любого $a>0$ и $|x-a|<a/2$. Это показывает, что функция $\ln x$ — аналитическая для любого $a>0$.

Пример 3. Найдем главный степенно́й член функции $\ln(1+x+x^2)$:

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2)+o(x+x^2) = x+o(x)+o(x) = x+o(x),$$
$$x\to 0.$$

Ведь $\ln(1+u) = u+o(u)$, $u\to 0$; $u = x+x^2\to 0$ $x\to 0$; $x^2 = o(x)$, $x\to 0$ и $o(x+x^2) = o(x)$, $x\to 0$, потому что

$$\frac{o(x+x^2)}{x} = \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{o(x+x^2)}{x+x^2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\frac{x+x^2}{x}} \to 0, \quad x\to 0.$$

Пример 4. Найдем теперь главный степенной член функции

$$\ln(1+x+x^2)-x.$$

Если воспользоваться предыдущим результатом, то это не даст главного члена. Ведь тогда

$$\ln(1+x+x^2)-x = x+o(x)-x = o(x), \qquad x\to 0.$$

Но мы получили некоторую информацию. Главный член, если существует, то имеет степень $n>1$. Попробуем воспользоваться формулой Тейлора с остатком $o(u^2)$, $u \to 0$ в смысле Пеано. Имеем $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, $u \to 0$, поэтому

$$\ln(1+x+x^2) - x = x + x^2 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o((x+x^2)^2) - x =$$
$$= x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

§ 5.12. Выпуклость кривой в точке. Точка перегиба

Говорят, что *кривая $y = f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью кверху (книзу)*, если существует окрестность x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к кривой в точке x_0 (т. е. в точке, имеющей абсциссу x_0) расположена выше (ниже) самой кривой (рис. 5.8; здесь в точке x_1 кривая обращена выпуклостью книзу, в точке x_2 — кверху).

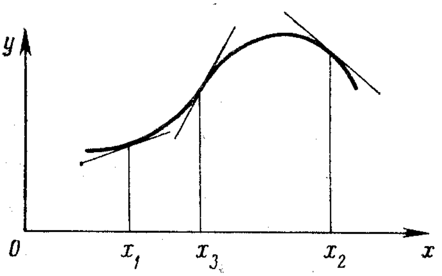

Рис. 5.8.

Говорят, что точка x_0 есть *точка перегиба кривой $y = f(x)$*, если при переходе x через x_0 точка кривой (имеющая абсциссу x) переходит с одной стороны касательной на другую (на рис. 5.8 точка x_3 — точка перегиба). Иначе говоря, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ кривая находится с одной стороны касательной в x_0, а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ — с другой.

Указанные определения выделяют возможные расположения кривой относительно касательной к ней в достаточно малой окрестности точки касания. Но не нужно думать, что эти определения исчерпывают все возможные случаи такого расположения. Вспомним о кривой, являющейся графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0). \end{cases}$$

Ось x пересекает и касается этой кривой в точке $x = 0$ и $x = 0$ не есть точка перегиба.

Теорема 1. *Если функция f имеет в точке x_0 вторую непрерывную производную и $f''(x_0) > 0$ (< 0), то кривая $y = f(x)$ обращена в x_0 выпуклостью книзу (кверху).*