остатком $o(u^2)$, $u \to 0$ в смысле Пеано. Имеем $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, $u \to 0$, поэтому

$$\ln(1+x+x^2) - x = x + x^2 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o((x+x^2)^2) - x =$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

§ 5.12. Выпуклость кривой в точке. Точка перегиба

Говорят, что *кривая $y = f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью кверху (книзу)*, если существует окрестность x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к кривой в точке x_0 (т. е. в точке, имеющей абсциссу x_0) расположена выше (ниже) самой кривой (рис. 5.8; здесь в точке x_1 кривая обращена выпуклостью книзу, в точке x_2 — кверху).

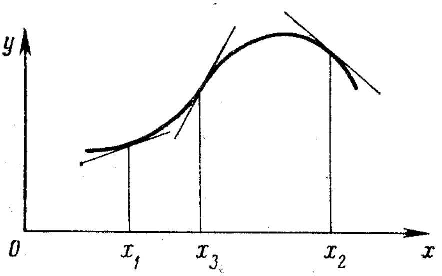

Рис. 5.8.

Говорят, что точка x_0 есть *точка перегиба кривой $y = f(x)$*, если при переходе x через x_0 точка кривой (имеющая абсциссу x) переходит с одной стороны касательной на другую (на рис. 5.8 точка x_3 — точка перегиба). Иначе говоря, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ кривая находится с одной стороны касательной в x_0, а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ — с другой.

Указанные определения выделяют возможные расположения кривой относительно касательной к ней в достаточно малой окрестности точки касания. Но не нужно думать, что эти определения исчерпывают все возможные случаи такого расположения. Вспомним о кривой, являющейся графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0). \end{cases}$$

Ось x пересекает и касается этой кривой в точке $x = 0$ и $x = 0$ не есть точка перегиба.

Теорема 1. *Если функция f имеет в точке x_0 вторую непрерывную производную и $f''(x_0) > 0$ (< 0), то кривая $y = f(x)$ обращена в x_0 выпуклостью книзу (кверху).*

Доказательство. Разлагаем f в окрестности $x=x_0$ по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x),$$

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0+\theta(x-x_0)) \quad (0<\theta<1).$$

Остаток $R(x)$ равен величине превышения кривой f над касательной к ней в точке x_0. В силу непрерывности f'', если $f''(x_0)>0$, то и $f''(x_0+\theta(x-x_0))>0$ для x, принадлежащих достаточно малой окрестности точки x_0, а потому, очевидно, и $R(x)>0$ для любого отличного от x_0 значения x, принадлежащего к указанной окрестности.

Аналогично рассматривается случай $f''(x_0)<0$.

Теорема 2. *Если функция f такова, что производная f''' непрерывна в x_0, а $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$, то кривая $y=f(x)$ имеет в x_0 точку перегиба.*

Доказательство. В этом случае

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x),$$

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0+\theta(x-x_0)).$$

В силу непрерывности f''' в x_0 и того факта, что $f'''(x_0)\neq 0$, следует, что $f'''(x_0+\theta(x-x_0))$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0; он один и тот же справа и слева от точки x_0. С другой стороны, множитель $(x-x_0)^3$ меняет знак при переходе x через x_0, а вместе с ним и величина $R(x)$ (равная превышению точки кривой над касательной в x_0) меняет знак при переходе x через x_0. Это доказывает теорему.

Сформулируем более общую теорему:

Теорема 3. *Пусть функция f обладает следующими свойствами:*

$$f''(x_0)=\ldots=f^{(k)}(x_0)=0,$$

$f^{(k+1)}(x)$ непрерывна в x_0 и $f^{(k+1)}(x_0)\neq 0$.

Тогда, если k — нечетное число, то кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью вверх или вниз в зависимости от того, будет ли $f^{(k+1)}(x_0)<0$ или $f^{(k+1)}(x_0)>0$, а если k — четное число, то x_0 есть точка перегиба кривой.

Если дополнительно к приведенным уже условиям еще

$$f'(x_0)=0, \tag{1}$$

то, если k — нечетное число, функция f достигает в точке x_0 максимума или минимума в зависимости от того, будет ли $f^{(k+1)}(x_0)<0$ или $f^{(k+1)}(x_0)>0$.

Доказательство основано на том, что при указанных условиях имеет место разложение по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),$$

а при дополнительном условии (1) это разложение превращается в следующее:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

В заключение заметим, что говорят также, что кривая $y=f(x)$ имеет точку перегиба в точке x, где производная $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$ (см. рис. 5.1. *в*, *г* на стр. 128 и замечания к ним).

§ 5.13. Выпуклость кривой на отрезке

По определению кривая $y=f(x)$ называется *выпуклой кверху* (*книзу*) на отрезке $[a, b]$, если любая дуга этой кривой с концами в точках x_1, x_2 ($a \leqslant x_1 < x_2 \geqslant b$) расположена не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 5.9, 5.10).

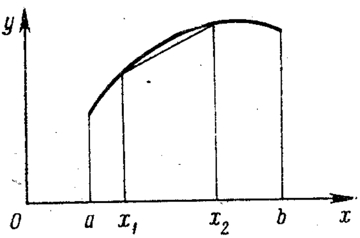

Рис. 5.9.

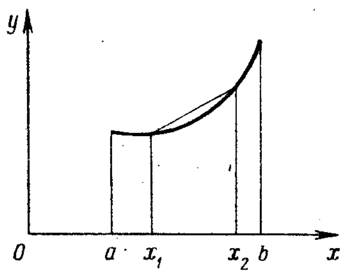

Рис. 5.10.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет вторую производную на (a, b).*

Для того чтобы кривая $y=f(x)$ была выпуклой кверху (книзу) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x) \leqslant 0$ $(f''(x) \geqslant 0)$ для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. Пусть наша кривая — выпуклая кверху на $[a, b]$. Тогда для любых x и $h>0$ таких, что x, $x+2h \in [a, b]$, имеет место неравенство $f(x+h) \geqslant (f(x)+f(x+2h))/2$, откуда $f(x+h)-f(x) \geqslant f(x+2h)-f(x+h)$.

Если теперь x_1 и x_2 — произвольные точки интервала (a, b), то, положив $h=(x_2-x_1)/n$, будем иметь

$$f(x_1+h)-f(x_1) \geqslant f(x_1+2h)-f(x_1+h) \geqslant \ldots \geqslant f(x_2)-f(x_2-h).$$

Таким образом, $(f(x_1+h)-f(x_1))/h \geqslant (f(x_2-h)-f(x_2))/(-h)$, и, переходя к пределу при $h \to 0$, получим неравенство

$$f'(x_1) \geqslant f'(x_2),$$