Доказательство основано на том, что при указанных условиях имеет место разложение по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

а при дополнительном условии (1) это разложение превращается в следующее:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

В заключение заметим, что говорят также, что кривая $y = f(x)$ имеет точку перегиба в точке x, где производная $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$ (см. рис. 5.1. *в*, *г* на стр. 128 и замечания к ним).

§ 5.13. Выпуклость кривой на отрезке

По определению кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой кверху* (*книзу*) на отрезке $[a, b]$, если любая дуга этой кривой с концами в точках x_1, x_2 ($a \leqslant x_1 < x_2 \geqslant b$) расположена не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 5.9, 5.10).

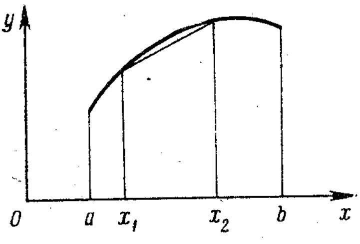

Рис. 5.9.

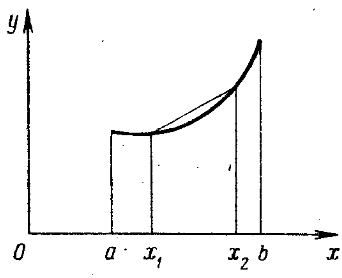

Рис. 5.10.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет вторую производную на (a, b).*

Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была выпуклой кверху (книзу) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x) \leqslant 0$ $(f''(x) \geqslant 0)$ для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. Пусть наша кривая — выпуклая кверху на $[a, b]$. Тогда для любых x и $h > 0$ таких, что x, $x + 2h \in [a, b]$, имеет место неравенство $f(x + h) \geqslant (f(x) + f(x + 2h))/2$, откуда $f(x + h) - f(x) \geqslant f(x + 2h) - f(x + h)$.

Если теперь x_1 и x_2 — произвольные точки интервала (a, b), то, положив $h = (x_2 - x_1)/n$, будем иметь

$$f(x_1 + h) - f(x_1) \geqslant f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) \geqslant \ldots \geqslant f(x_2) - f(x_2 - h).$$

Таким образом, $(f(x_1 + h) - f(x_1))/h \geqslant (f(x_2 - h) - f(x_2))/(-h)$, и, переходя к пределу при $h \to 0$, получим неравенство

$$f'(x_1) \geqslant f'(x_2),$$

показывающее, что производная f' на интервале (a, b) не возрастает. Но тогда $f''(x) \leqslant 0$ на (a, b).

Обратно пусть $f''(x) \leqslant 0$ и $a < x_1 < x_2 < b$. Нужно доказать, что функция $F(x) = f(x) - f(x_1) - m(x - x_1)$, где $m = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$, удовлетворяет неравенству $F(x) \geqslant 0$ на $[x_1, x_2]$. Допустим, что это не так. Тогда $\min\limits_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} F(x) = F(x_0) < 0$ и $x_1 < x_0 < x_2$. Поэтому $F_1'(x_0) = 0$.

Применив формулу Тейлора, получим $0 = F(x_2) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} \times$ $\times F''(x_0 + \theta(x_2 - x_0)) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} f''(x_0 + \theta(x_2 - x_0))$. Но в правой части этой цепочки равенств первый член, по предположению, отрицательный, а второй неположительный, поэтому правая часть меньше нуля и мы пришли к противоречию.

Доказательство в случае

$$f''(x) \geqslant 0$$

аналогично.

Пример. Функция $y = \sin x$ имеет непрерывную первую производную и вторую производную

$$(\sin x)'' = -\sin x \leqslant 0$$

на $[0, \pi/2]$. Поэтому хорда OA, стягивающая дугу кривой $y = \sin x$ на $[0, \pi/2]$, ниже синусоиды (рис. 5.11). Так как уравнение хорды $y = (2/\pi)x$, то мы получим неравенство

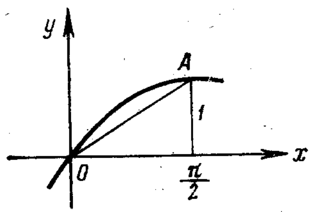

Рис. 5.11.

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

часто употребляемое в математическом анализе.

§ 5.14. Раскрытие неопределенностей

В нашем распоряжении теперь имеются очень сильные методы дифференциального исчисления — теоремы о среднем и формула Тейлора. С их помощью можно автоматизировать вычисление многих пределов, приводящих при грубом применении обычных правил к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Случай 0/0. Требуется вычислить $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в предположении, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \neq 0$ в окрестности a.

Пусть a — конечное число и для функций f и φ найдены главные степенные члены (относительно $(x - a)$):

$$f(x) = \alpha_p (x - a)^p + o((x - a)^p) \quad (x \to a), \ \alpha_p \neq 0,$$
$$\varphi(x) = \beta_q (x - a)^q + o((x - a)^q) \quad (x \to a), \ \beta_q \neq 0.$$