показывающее, что производная f' на интервале (a, b) не возрастает. Но тогда $f''(x) \leqslant 0$ на (a, b).

Обратно пусть $f''(x) \leqslant 0$ и $a < x_1 < x_2 < b$. Нужно доказать, что функция $F(x) = f(x) - f(x_1) - m(x - x_1)$, где $m = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$, удовлетворяет неравенству $F(x) \geqslant 0$ на $[x_1, x_2]$. Допустим, что это не так. Тогда $\min\limits_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} F(x) = F(x_0) < 0$ и $x_1 < x_0 < x_2$. Поэтому $F_1'(x_0) = 0$.

Применив формулу Тейлора, получим $0 = F(x_2) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} \times$ $\times F''(x_0 + \theta(x_2 - x_0)) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} f''(x_0 + \theta(x_2 - x_0))$. Но в правой части этой цепочки равенств первый член, по предположению, отрицательный, а второй неположительный, поэтому правая часть меньше нуля и мы пришли к противоречию.

Доказательство в случае

$$f''(x) \geqslant 0$$

аналогично.

Пример. Функция $y = \sin x$ имеет непрерывную первую производную и вторую производную

$$(\sin x)'' = -\sin x \leqslant 0$$

на $[0, \pi/2]$. Поэтому хорда OA, стягивающая дугу кривой $y = \sin x$ на $[0, \pi/2]$, ниже синусоиды (рис. 5.11). Так как уравнение хорды $y = (2/\pi)x$, то мы получим неравенство

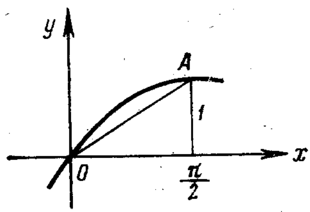

Рис. 5.11.

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

часто употребляемое в математическом анализе.

§ 5.14. Раскрытие неопределенностей

В нашем распоряжении теперь имеются очень сильные методы дифференциального исчисления — теоремы о среднем и формула Тейлора. С их помощью можно автоматизировать вычисление многих пределов, приводящих при грубом применении обычных правил к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Случай 0/0. Требуется вычислить $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в предположении, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \neq 0$ в окрестности a.

Пусть a — конечное число и для функций f и φ найдены главные степенные члены (относительно $(x - a)$):

$$f(x) = \alpha_p(x - a)^p + o((x - a)^p) \qquad (x \to a), \ \alpha_p \neq 0,$$

$$\varphi(x) = \beta_q(x - a)^q + o((x - a)^q) \qquad (x \to a), \ \beta_q \neq 0.$$

Тогда (см. § 4.10, (10))

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_p(x-a)^p}{\beta_q(x-a)^q}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_p}{\beta_p} & \text{при } p=q,\\ 0 & \text{при } p>q,\\ \infty & \text{при } p<q.\end{cases}$$

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+o(1)}{\frac{1}{6}+o(1)}=-2.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x}=0.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x}{\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)-\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}+o(x^2)\right)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)x^2+o(x^2)}=-3$$

Но функции f и φ могут не иметь производных в точке a или почему-либо может быть затруднительно или нежелательно вычисление их в этой точке. Тогда может быть полезна следующая общая теорема, доказательство которой основано на применении теоремы о среднем Коши:

Теорема. 1. *Пусть функции f и φ непрерывны и имеют производные в окрестности точки a (a — число или ∞), за исключением, быть может, точки a; при этом φ и φ' не равны нулю в указанной окрестности и*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0.$$

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \tag{1}$$

(конечный или бесконечный), то существует также равный ему предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \tag{2}$$

В частности, здесь речь может идти о правом или левом пределе, и тогда под окрестностью a понимается правая или левая ее окрестность.

Доказательство. Пусть a — число (конечное). Тогда, полагая $f(a) = 0 = \lim_{x\to a} f(x)$, $\varphi(a) = 0 = \lim_{x\to a} \varphi(x)$, мы получим, что функции f и φ непрерывны в точке a. Это свойство вместе со сформулированными в теореме свойствами позволяет применить к функциям f и φ теорему Коши. Таким образом, какова бы ни была точка x из указанной окрестности, найдется между a и x точка $\xi = a + \theta(x - a)$, $0 < \theta < 1$ такая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{3}$$

Если существует предел (1), то, очевидно, также существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A,$$

а следовательно, и предел (2).

Итак, существование второго предела в (2) влечет существование равного ему первого предела в (2). Обратное утверждение неверно.

Пример 4. В силу того, что $\sin x \approx x (x \to 0)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

С другой стороны, соответствующее отношение производных равно

$$\frac{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x} = 2x\frac{1}{\cos x}\sin\frac{1}{x} - \frac{\cos(1/x)}{\cos x}. \tag{4}$$

Оно, очевидно, не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$. Это видно из того, что первый член правой части стремится к нулю, а второй не стремится к какому-либо пределу. Это не мешает тому, что после подстановки в (4) вместо x функции $\xi = \xi(x)$, которая возникает в формуле Коши (3), получается такая функция от x, которая имеет предел при $x \to 0$.

Нам надо рассмотреть еще случай $a = \infty$ (или $a = +\infty$ или $a = -\infty$). Сделаем подстановку $x = 1/u$. Тогда получим функции $F(u) = f(1/u)$, $\Phi(u) = \varphi(1/u)$ от u. Они непрерывны в окрестности точки 0 (при $a = +\infty$ или $a = -\infty$ — в правой или левой окрестностях точки 0), имеют производные (по u) в этой окрестности и Φ, так же как Φ' не равны нулю в ней.

При этом $\lim_{u\to 0} F(u) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{u\to 0} \Phi(u) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

Далее, если существует $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то, очевидно, существует равный ему предел:

$$\lim_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{f'(1/u)\left(-1/u^2\right)}{\varphi'(1/u)\left(-1/u^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Поэтому на основании уже доказанного выше (для конечного a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{F(u)}{\Phi(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Этим теорема доказана.

Приводимое ниже доказательство теоремы 1 годится как для конечного, так и бесконечного a, т. е. a может быть равным ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Пусть задана принадлежащая к указанной в теореме окрестности последовательность точек x_k ($x_k\neq a$), стремящаяся к a ($x_k\to\to a$). В силу того, что $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$ при $x\to a$, для каждого натурального k найдется натуральное n_k такое, что

$$\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|<\frac{1}{k}|f(x_k)|,\quad \left|\varphi\left(x_{n_k}\right)\right|<\frac{1}{k}|\varphi(x_k)|,\quad k=1,2,\ldots,$$

при этом можно считать, что $n_k<n_{k+1}$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} f\left(x_{n_k}\right)&=o(f(x_k)),\\ \varphi\left(x_{n_k}\right)&=o(\varphi(x_k)),\end{aligned}\right.\quad k\to\infty, \tag{5}$$

и справедливо асимптотическое равенство (см. теорему 1 § 4.10)

$$\frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)}\approx\frac{f(x_k)-f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi(x_k)-\varphi\left(x_{n_k}\right)}\qquad(k\to\infty). \tag{6}$$

Применяя для каждого k теорему Коши (см. (1) § 5.8), находим точку $\xi_k\in\left(x_k,\ x_{n_k}\right)$ такую, что

$$\frac{f(x_k)-f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi(x_k)-\varphi\left(x_{n_k}\right)}=\frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)}. \tag{7}$$

В силу условия (1) из (6) и (7) получим (см. теорему 2 § 4.10), что существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi(x_k)-\varphi\left(x_{n_k}\right)}=\lim_{k\to\infty}\frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)}=A.$$

Теорема доказана.

Случай ∞/∞. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют производные f' и φ' в окрестности (в частности, в правой или в левой окрестности) точки a (конечной или бесконечной), за исключением самой точки a. При этом $\varphi'\neq 0$ в указанной окрест-*

ности и

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \qquad (+\infty \text{ или } -\infty). \tag{8}$$

Тогда, если существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A, \tag{9}$$

то существует равный ему предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{10}$$

Доказательство. Зададим произвольную последовательность точек x_k ($x_k \neq a$), стремящуюся к a ($x_k \to a$).

Так как по условию $f(x_k) \to \infty$, $\varphi(x_k) \to \infty$, то каждому натуральному k можно привести в соответствие натуральное $n_k > k$ ($n_k > n_{k-1}$) такое, что

$$k\,|f(x_k)| < \left|f\left(x_{n_k}\right)\right|, \qquad k\,|\varphi(x_k)| < \left|\varphi\left(x_{n_k}\right)\right| \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$f(x_k) = o\left(f\left(x_{n_k}\right)\right), \qquad \varphi(x_k) = o\left(\varphi\left(x_{n_k}\right)\right) \qquad (k \to \infty).$$

Поэтому (см. теоремы 1 и 2 § 4.10) для некоторых $\xi_k \in (x_k, x_{n_k})$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi\left(x_{n_k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f\left(x_{n_k}\right) - f(x_k)}{\varphi\left(x_{n_k}\right) - \varphi(x_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)} = A \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

потому что при $k \to \infty$ $x_k \to a$, следовательно, $x_{n_k} \to a$ ($k < n_k$) и $\xi_k \to a$. Мы доказали, что из всякой последовательности $\left\{\frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)}\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{\frac{f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi\left(x_{n_k}\right)}\right\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi\left(x_{n_k}\right)} = A.$$

Но тогда (см. теорему 9 § 4.1) существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,$$

и выполняется равенство (10).

В равенстве (10) существование второго предела влечет существование ему равного первого, но не наоборот, как показывает следующий пример: предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

существует, между тем как предел при $x \to \infty$ отношения производных $(1 - \cos x)/1$ не существует.

Выражаемые теоремами 1, 2 правила, в силу которых вычисление предела отношения функций может быть сведено к вычислению предела отношения их производных, называют правилом Лопиталя, по имени математика, который сформулировал это правило, правда, для весьма простых случаев. Впрочем это правило было известно И. Бернулли до Лопиталя *).

Другие неопределенности. Нам остается еще рассмотреть другие виды неопределенностей. Их можно свести к предыдущим.

Если $f \to \infty$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f - \varphi = \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{f}\right) : \frac{1}{f\varphi}$, и получаем неопределенность вида 0/0.

Если же $f \to 0$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f\varphi = \frac{f}{1/\varphi}$, что приводит к неопределенности вида 0/0.

Выражения u^v, приводящие к неопределенностям 0^0, ∞^0, 1^∞, удобно логарифмировать, что приводит к неопределенностям вида $0 \cdot \infty$.

Например, $\lim\limits_{x \to a} u^v = e^{\lim\limits_{x \to a} v \ln u}$ если предел показателя степени в правой части конечный. Если же последний равен $+\infty$, $-\infty$, то предел левой части равен соответственно $+\infty$, 0.

Примеры.

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{1/x^2} = 0.$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k!}{e^x} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

§ 5.15. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции

Функцию f мы называем *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она имеет непрерывную производную на этом отрезке.

В этом определении под производной в точках a, b понимается соответственно правая и левая производная в этих точках. Гладкая на $[a, b]$ функция автоматически непрерывна на $[a, b]$, ведь она имеет всюду на $[a, b]$ производную.

Другое эквивалентное определение гласит: *функция f гладкая на $[a, b]$, если она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на интервале (a, b) непрерывную производную $f'(x)$ такую, что*

---

*) Г. Ф. Лопиталь (1661—1704) — французский математик. И. Бернулли (1667—1748) — швейцарский математик.