существует, между тем как предел при $x \to \infty$ отношения производных $(1-\cos x)/1$ не существует.

Выражаемые теоремами 1, 2 правила, в силу которых вычисление предела отношения функций может быть сведено к вычислению предела отношения их производных, называют правилом Лопиталя, по имени математика, который сформулировал это правило, правда, для весьма простых случаев. Впрочем это правило было известно И. Бернулли до Лопиталя*).

Другие неопределенности. Нам остается еще рассмотреть другие виды неопределенностей. Их можно свести к предыдущим.

Если $f \to \infty$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f-\varphi = \left(\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{f}\right):\frac{1}{f\varphi}$, и получаем неопределенность вида 0/0.

Если же $f \to 0$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f\varphi = \frac{f}{1/\varphi}$, что приводит к неопределенности вида 0/0.

Выражения u^v, приводящие к неопределенностям 0^0, ∞^0, 1^∞, удобно логарифмировать, что приводит к неопределенностям вида $0 \cdot \infty$.

Например, $\lim\limits_{x\to a} u^v = e^{\lim\limits_{x\to a} v \ln u}$ если предел показателя степени в правой части конечный. Если же последний равен $+\infty$, $-\infty$, то предел левой части равен соответственно $+\infty$, 0.

Примеры.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1/x}{1/x^2} = 0.$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{k!}{e^x} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

§ 5.15. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции

Функцию f мы называем *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она имеет непрерывную производную на этом отрезке.

В этом определении под производной в точках a, b понимается соответственно правая и левая производная в этих точках. Гладкая на $[a, b]$ функция автоматически непрерывна на $[a, b]$, ведь она имеет всюду на $[a, b]$ производную.

Другое эквивалентное определение гласит: *функция f гладкая на $[a, b]$, если она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на интервале (a, b) непрерывную производную $f'(x)$ такую, что*

---

*) Г. Ф. Лопиталь (1661—1704) — французский математик. И. Бернулли (1667—1748) — швейцарский математик.

существуют пределы

$$f'(a+0)=A, \quad f'(b-0)=B. \tag{1}$$

Ясно, что первое определение влечет второе. Допустим теперь, что f — гладкая в смысле второго определения. Тогда

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)\to A \qquad (h>0,\ h\to 0,\ 0<\theta<1) \tag{2}$$

и, следовательно, f имеет производную (правую) в точке a, равную $f'(a)=A$. В силу первого равенства (1) она непрерывна (справа) в этой точке. Аналогично доказывается существование и непрерывность производной от f в точке b и равенство $f'(b)=B$. Следовательно, f гладкая также и в смысле первого определения.

Функцию f мы называем *кусочно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если она определена и непрерывна всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек x_j $(a\leqslant x_1<\ldots$ $\ldots<x_N\leqslant b)$, в которых существуют пределы f справа и слева, т. е. имеют смысл конечные числа $f(x_j-0)$, $f(x_j+0)$. Впрочем, для $x=a$ и $x=b$ предполагается, что имеют смысл соответственно только $f(a+0)$, $f(b-0)$.

Таким образом, кусочно непрерывная на $[a, b]$ функция f непрерывна на каждом из интервалов (x_j, x_{j+1}). Больше того, независимо от того, определена или не определена она в точках x_j, x_{j+1}, ее можно видоизменить или доопределить в этих точках так, что она окажется непрерывной уже на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$.

Пример 1. Функция $[x]$, определяемая как наибольшее целое число, не превышающее x, может служить примером функции, являющейся кусочно непрерывной на любом отрезке $[a, b]$. Ее график изображен на рис. 5.12. Точками разрыва функции $[x]$ являются целые значения $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Разрывы в этих точках первого рода, т. е. в них существуют правый и левый пределы функции. Рассмотрим один из наибольших интервалов непрерывности нашей функции, для определенности $(1, 2)$. На нем функция $[x]$ непрерывна. На соответствующем отрезке $[1, 2]$ она уже перестает быть непрерывной $([2-0]=1\neq[2])$. Но достаточно ее видоизменить, положив равной 1 при $x=2$, как она окажется непрерывной на $[1, 2]$.

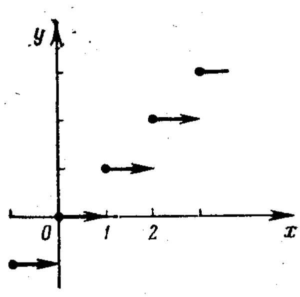

Рис. 5.12.

Мы назовем функцию f *кусочно гладкой на отрезке* $[a, b]$, если она кусочно непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную f' на этом отрезке. Таким образом, отрезок $[a, b]$ можно разбить точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b \tag{3}$$

так, что f непрерывна вместе со своей производной f' на каждом из интервалов (x_j, x_{j+1}) и, кроме того, существуют односторонние конечные пределы как f, так и f' в концевых точках x_j этих интервалов.

Если, рассматривая вполне определенный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$, видоизменить или доопределить нашу функцию f на его концах $x = x_j$, x_{j+1} так, что она примет в них соответственно значения $f(x_j+0)$, $f(x_{j+1}-0)$, то, как это было установлено в начале этого параграфа, функция f окажется гладкой на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$.

Например, функция $\psi(x) = [x]$, очевидно, не только кусочно непрерывна, но и кусочно гладкая на любом отрезке $[a, b]$, потому что на интервалах $(m, m+1)$, где m — целое, она непрерывна вместе со своей производной и на их концах существуют односторонние пределы ψ и ψ'. Если заменить значение $\psi(m+1) = m+1$ на новое значение $\psi(m+1) = m$, то функция ψ окажется постоянной на замкнутом отрезке $[m, m+1]$, следовательно, гладкой (см. рис. 5.12).

Важным частным случаем кусочно гладкой функции является *непрерывная кусочно гладкая на отрезке* $[a, b]$ *функция* f. Для нее имеют место следующие характерные свойства:

1) f непрерывна на $[a, b]$; 2) существует разбиение (3) отрезка $[a, b]$ такое, что f является гладкой функцией на каждом из частичных отрезков $[x_j, x_{j+1}]$.

Пример 2. Функция $|x|$ не является гладкой на $[-1, 1]$, потому что в точке $x = 0$ она не имеет производной. С другой стороны, $|x|$ — непрерывная кусочно гладкая на $[-1, +1]$ функция, потому что она непрерывна на $[-1, +1]$ и имеет непрерывную производную на интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, которая к тому же имеет соответствующие односторонние пределы на концах этих интервалов.

Очевидно, что $$|x|' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Мы считаем, что функция $\operatorname{sign} x$ в точке $x = 0$ не определена.

Упражнения.

1. Показать, что функция, изображенная на рис. 5.6, кусочно гладкая. Показать еще, что функции изображенные на рисунках 5.1, *в* — *е*, не являются таковыми.

Пояснение. Учесть, что эти функции в точке x_0 имеют бесконечные производные, во всяком случае, правые и левые.

2. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| \leqslant 1, \end{cases}$ не является гладкой на отрезке $[-1, +1]$, несмотря на то, что она имеет производную во всех точках этого отрезка.

3. Показать, что если функция f непрерывная, но не гладкая на отрезке $[a, b]$, и в то же время гладкая на каждом из отрезков $[a, c]$, $[c, b]$, то f не имеет производной в точке c, хотя и имеет в этой точке правую и левую производные.

4. Показать, что если f непрерывна и имеет производную f' во всех точках $[a, b]$, то последняя не может иметь разрывы первого рода (производная от f в примере 2, хотя и существует всюду на $[-1, +1]$, но имеет в $x = 0$ разрыв второго рода).