Несколько основных формул дифференцирования

1. $$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x\cdot 1' - 1\cdot x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \qquad (x \neq 0).$$

Более общая формула

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n\cdot 1' - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} \qquad (n = 1,\ 2\ldots;\ x \neq 0).$$

Таким образом, справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots), \tag{7}$$

обобщающая формулу § 1.5 (1) на любые целые n.

Дальше мы увидим, что она остается верной и для нецелых n.

2. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{8}$$

3. $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{9}$$

§ 5.2. Дифференциал функции

Если функция f имеет в точке x производную, то существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \qquad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x; \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0 \tag{1}$$

или

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{1'}$$

Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то равенство (1) можно записать следующим образом:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{2}$$

Говорят, что функция f *дифференцируема в точке* x, если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде (2), где A — некоторая константа, не зависящая от Δx (но вообще зависящая от x).

Из сказанного следует, что *если функция f имеет в точке x производную, то она дифференцируема в этой точке* ($A = f'(x)$).

Верно и обратное утверждение: *если функция f дифференцируема в точке x, т. е. ее приращение в точке x представимо в виде* (2), *то она имеет производную в точке x, равную числу A.*

В самом деле, пусть приращение Δy в точке x представимо в виде (2). Разделим обе части (2) на Δx и перейдем к пределу. Тогда

$$f'(x) = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} o(1) = A.$$

Таким образом, *для того чтобы функция f имела производную в точке x, необходимо и достаточно чтобы она была дифференцируемой в этой точке.*

Равенство (2) показывает, что если $A = f'(x) \neq 0$, то приращение функции эквивалентно при $\Delta x \to 0$ первому слагаемому правой части (2):

$$\Delta y \approx A\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

В этом случае (когда $A \neq 0$) член $A\Delta x$ называется *главным линейным членом приращения.* Главный член линейно (точнее, пропорционально) зависит от Δx. *Приближенно, пренебрегая бесконечно малой $o(\Delta x)$ высшего порядка, при малых Δx можно считать Δy равным главному члену.*

Главный линейный член приращения называют *дифференциалом* функции f в точке x (соответствующим приращению Δx независимой переменной x) и обозначают так:

$$dy = df = f'(x)\Delta x.$$

В целях симметрии приращение Δx независимой переменной обозначают еще через dx, полагая, таким образом, $\Delta x = dx$. Это соглашение не противоречит выражению $dx = x'\Delta x = \Delta x$ для дифференциала функции $y = x$ от x.

Таким образом, дифференциал функции f в точке x запишется так:

$$dy = f'(x)dx. \tag{3}$$

Из этого равенства следует, что *производная от f в точке x равна $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т. е. она равна отношению дифференциала функции f в точке x к соответствующему дифференциалу независимой переменной x.*

Надо иметь в виду, *что дифференциал dx независимой переменной не зависит от x, он равен Δx — произвольному приращению аргумента x. Что же касается дифференциала dy функции y (отличной от x), то он зависит от x и dx* (см. (3)).

Можно дать геометрическое представление указанных понятий.

Рассмотрим (рис. 5.3) график функции $y = f(x)$; A и B суть точки графика, соответствующие значениям x и $x + \Delta x$ независимой переменной. Ординаты точек A и B соответственно равны $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$. Приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в точке x равно длине отрезка BD и представляется в виде суммы $\Delta y = BD = DC + CB$, где $DC = \operatorname{tg} \alpha \, \Delta x = f'(x)\Delta x$ и α есть угол между касательной в точке A к графику и положительным направлением оси x.

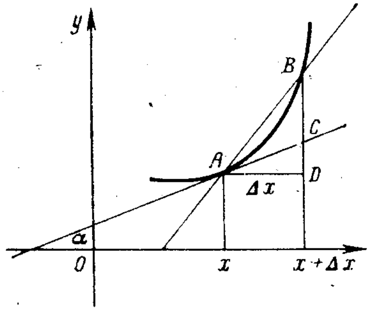

Рис. 5.3.

Мы видим, что отрезок DC есть дифференциал функции f в точке x:

$$DC = dy = f'(x)\Delta x.$$

Таким образом, на долю второго члена CB приращения Δy приходится величина $o(\Delta x)$. Эта величина при больших Δx может быть даже больше, чем главный член, но она есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x \to 0$. При $f'(x) \neq 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство $CB/DC < \varepsilon$.

Отметим очевидные формулы:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)' \, dx = u' \, dx \pm v' \, dx = du \pm dv, \tag{4}$$

$$d(uv) = (uv)' \, dx = (uv' + u'v) \, dx = u \, dv + v \, du, \tag{5}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v \, du - u \, dv}{v^2}. \tag{6}$$

Пример. Нужно прикинуть, сколько материала истрачено на изготовление коробки кубической формы, если известно, что внутренний размер ребра коробки равен 10 *см*, а толщина стенок равна 0,1 *см*.

Объем куба есть функция $V(a) = a^3$ от длины его ребра a. Объем стенок коробки определяется как приращение функции

$$\Delta V = V(10 + 0,1) - V(10) \approx V'(10) \cdot 0,1 =$$
$$= 0,1 \, [3a^2]_{a=10} = 300 \cdot 0,1 = 30 \ (\text{см}^3).$$

§ 5.3. Производная функции от функции

Теорема. *Пусть задана функция от функции $z = F(x) = f(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$. При этом функция φ имеет производную в точке x, а функция f имеет производную в точке y. Тогда существует производная от F в точке x, равная*

$$F'(x) = f'(y)\varphi'(x). \tag{1}$$