Рассмотрим (рис. 5.3) график функции $y = f(x)$; A и B суть точки графика, соответствующие значениям x и $x + \Delta x$ независимой переменной. Ординаты точек A и B соответственно равны $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$. Приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в точке x равно длине отрезка BD и представляется в виде суммы $\Delta y = BD = DC + CB$, где $DC = \operatorname{tg} \alpha\, \Delta x = f'(x) \Delta x$ и α есть угол между касательной в точке A к графику и положительным направлением оси x.

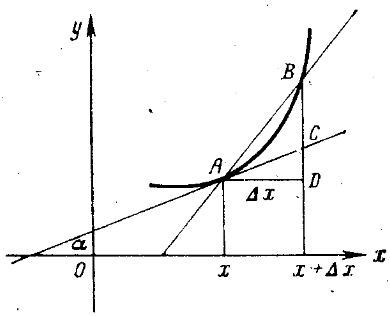

Рис. 5.3.

Мы видим, что отрезок DC есть дифференциал функции f в точке x:

$$DC = dy = f'(x) \Delta x.$$

Таким образом, на долю второго члена CB приращения Δy приходится величина $o(\Delta x)$. Эта величина при больших Δx может быть даже больше, чем главный член, но она есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x \to 0$. При $f'(x) \neq 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство $CB/DC < \varepsilon$.

Отметим очевидные формулы:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'\, dx = u'\, dx \pm v'\, dx = du \pm dv, \tag{4}$$

$$d(uv) = (uv)'\, dx = (uv' + u'v)\, dx = u\, dv + v\, du, \tag{5}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}. \tag{6}$$

Пример. Нужно прикинуть, сколько материала истрачено на изготовление коробки кубической формы, если известно, что внутренний размер ребра коробки равен 10 *см*, а толщина стенок равна 0,1 *см*.

Объем куба есть функция $V(a) = a^3$ от длины его ребра a. Объем стенок коробки определяется как приращение функции

$$\Delta V = V(10 + 0,1) - V(10) \approx V'(10) \cdot 0,1 =$$
$$= 0,1\, [3a^2]_{a=10} = 300 \cdot 0,1 = 30 \ (см^3).$$

§ 5.3. Производная функции от функции

Теорема. *Пусть задана функция от функции $z = F(x) = f(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$. При этом функция φ имеет производную в точке x, а функция f имеет производную в точке y. Тогда существует производная от F в точке x, равная*

$$F'(x) = f'(y) \varphi'(x). \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция f имеет производную в точке y, то она дифференцируема в этой точке (см. предыдущий параграф), т. е.

$$\Delta z = f'(y)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y \quad (\varepsilon(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0). \tag{2}$$

Будем считать, что $\varepsilon(0) = 0$. Равенство (2) при таком соглашении останется верным $(0 = f'(y)0 + 0, 0)$.

Зададим приращение Δx независимой переменной x. Оно влечет за собой определенное приращение Δy функции $y = \varphi(x)$, которое, в свою очередь, влечет за собой приращение Δz функции $z = f(y)$, выраженное через Δy по формуле (2).

Но полученное число Δz есть в то же время приращение функции $z = F(x)$, соответствующее взятому нами приращению Δx в точке x.

Разделив обе части равенства (2) на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

Перейдя теперь к пределу при $\Delta x \to 0$, получим производную

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0}\varepsilon(\Delta y)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= f'(y)\varphi'(x) + 0\cdot\varphi'(x) = f'(y)\varphi'(x).$$

Заметим, что соглашение, что $\varepsilon(0) = 0$, было сделано на тот случай, когда при некоторых $\Delta x \neq 0$ будет $\Delta y = 0$.

Формула (1) может быть усложнена. Например, если $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, $x = \psi(\xi)$ и все три функции имеют производные в соответствующих точках, то $\quad z'_\xi = z'_y y'_x x'_\xi$.

Пример 1. Чтобы вычислить производную по переменной x от функции $z = \cos(\sin^3 x^2)$, вводим цепочку вспомогательных функций:

$$z = \cos u, \quad u = v^3, \quad v = \sin w, \quad w = x^2.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (\cos u)'(v^3)'(\sin w)'(x^2)' =$$

$$= -\sin u\,(3v^2)\cos w\cdot 2x = -6x\cos x^2\sin^2 x^2\sin(\sin^3 x^2).$$

Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно *гиперболическими синусом, косинусом, танген-*

сом, котангенсом. Очевидно,

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \tag{4}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x, \tag{5}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}, \tag{6}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{(\operatorname{th} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}\frac{(\operatorname{ch} x)^2}{(\operatorname{sh} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}. \tag{7}$$

Другое доказательство теоремы. Рассмотрим некоторую последовательность значений $\Delta x \to 0$.

Если ее значения вызывают соответствующие $\Delta y \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = z'_y y'_x.$$

Другой характерный случай, если значения Δx рассматриваемой последовательности вызывают $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta z = 0$, и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 = z'_y y'_x.$$

Последнее равенство в этой цепи верно потому, что в этом случае, очевидно, необходимо $y'_x = 0$.

Если теперь последовательность значений $\Delta x \to 0$ произвольна, то из нее всегда можно выделить подпоследовательность первого или второго вида. В обоих случаях предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ $(\Delta x \to 0)$ существует и равен $z'_y y'_x$. Но тогда существует предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ для нашей последовательности (см. § 4.1, теорема 9), равный, очевидно, $z'_y y'_x$.

§ 5.4. Производная обратной функции

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная строго монотонная, т. е. строго возрастающая или строго убывающая, функция $y = f(x)$. Пусть образ (a, b) есть интервал (A, B). Тогда обратная к f функция $x = \varphi(y)$ есть однозначная непрерывная и строго монотонная на (A, B) функция (см. § 4.5).

Зафиксируем $x \in (a, b)$ и дадим ему приращение $(x + \Delta x \in \in (a, b))$. Тогда f получит соответствующее приращение Δy $(y, y + \Delta y \in (A, B))$, такое, что $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных Δx и Δy имеет место утверждение: из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$, и обратно.

Пусть теперь функция φ в точке y имеем неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция f так-