сом, котангенсом. Очевидно,

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x, \tag{4}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x, \tag{5}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x\,(\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}, \tag{6}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{(\operatorname{th} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}\,\frac{(\operatorname{ch} x)^2}{(\operatorname{sh} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}. \tag{7}$$

Другое доказательство теоремы. Рассмотрим некоторую последовательность значений $\Delta x \to 0$.

Если ее значения вызывают соответствующие $\Delta y \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = z'_y y'_x.$$

Другой характерный случай, если значения Δx рассматриваемой последовательности вызывают $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta z = 0$, и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 = z'_y y'_x.$$

Последнее равенство в этой цепи верно потому, что в этом случае, очевидно, необходимо $y'_x = 0$.

Если теперь последовательность значений $\Delta x \to 0$ произвольна, то из нее всегда можно выделить подпоследовательность первого или второго вида. В обоих случаях предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ $(\Delta x \to 0)$ существует и равен $z'_y y'_x$. Но тогда существует предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ для нашей последовательности (см. § 4.1, теорема 9), равный, очевидно, $z'_y y'_x$.

§ 5.4. Производная обратной функции

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная строго монотонная, т. е. строго возрастающая или строго убывающая, функция $y = f(x)$. Пусть образ (a, b) есть интервал (A, B). Тогда обратная к f функция $x = \varphi(y)$ есть однозначная непрерывная и строго монотонная на (A, B) функция (см. § 4.5).

Зафиксируем $x \in (a, b)$ и дадим ему приращение $(x + \Delta x \in (a, b))$. Тогда f получит соответствующее приращение Δy $(y, y + \Delta y \in (A, B))$, такое, что $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных Δx и Δy имеет место утверждение: из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$, и обратно.

Пусть теперь функция φ в точке y имеем неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция f также имеет в соответствующей точке x производную. В самом деле,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Так как из того, что $\Delta x\to 0$, следует, что $\Delta y\to 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)},$$

и мы получили

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \tag{1}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}. \tag{1'}$$

Этим доказано, что *если $y=f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция и $x=\varphi(y)$ — обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y)\neq 0$, то функция f имеет в соответствующей точке x производную, определяемую формулой* (1).

Может случиться, что в точке y $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\infty$. В этом случае, очевидно, функция f имеет в точке x производную $f'(x)=0$.

Если же $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=0$, то для строго возрастающей функции при этом $\Delta x/\Delta y>0$, а для строго убывающей $\Delta x/\Delta y<0$. В первом случае $f'(x)=+\infty$, а во втором $f'(x)=-\infty$.

Производная $\lg_a x$. На основании доказанной теоремы, если $y=\lg_a x$, то

$$(\lg_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\ln_a e}{x}\quad (a>0).$$

В случае натурального логарифма производная имеет особенно простой вид

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Этим объясняется, что в математическом анализе, по крайней мере в теоретических рассуждениях, предпочитают рассматривать логарифмические функции при основании e.

Функция $\ln x$ как действительная функция определена только для положительных значений x *).

*) Для отрицательных x функция $\ln x$ также может быть естественно определена как комплексная функция. Но эти вопросы нас здесь не интересуют.

Но можно рассматривать функцию $\ln|x|$, которая определена как для положительных, так и для отрицательных x. Ее график симметричен относительно оси y, а для положительных x совпадает с графиком $\ln x$ (рис. 5.4).

Функция $\ln|x|$ будет играть большую роль в интегральном исчислении. Ее производная при $x \neq 0$ равна

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sign} x = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ для } x > 0, \\ -1 \text{ для } x < 0. \end{cases}$$

(См. далее § 8.1, второй пример таблицы неопределенных интегралов.)

Для производной от степенной функции $x^n (x > 0)$, где n — любое действительное число, имеет место формула

$$(x^n)' = \left(e^{n \ln x}\right)' = \frac{n}{x} e^{n \ln x} = nx^{n-1}, \tag{8}$$

обобщающая формулу § 1.5, (1).

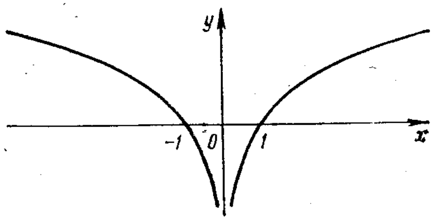

Рис. 5.4.

Производные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ строго возрастает на отрезке $[-1, +1]$ и отображает этот отрезок на $[-\pi/2, \pi/2]$. Обратная к ней функция $x = \sin y$ имеет производную $(\sin y)' = \cos y$, положительную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

Следовательно,

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Здесь берется арифметическое значение корня (со знаком «+»). Функция $y = \operatorname{arctg} x$ строго возрастает на действительной оси $(-\infty, +\infty)$ и отображает ее на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Обратная к ней функция $x = \operatorname{tg} y$ имеет производную $(\operatorname{tg} y)' = \sec^2 y$, не равную нулю на этом интервале. Поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Упражнение. Доказать равенство $(\lg_x a)' = -\dfrac{(\lg_x a)^2}{x \ln a}$.