§ 5.6. Производные и дифференциалы высшего порядка

Производная от функции f есть снова функция. Поэтому можно попытаться взять от нее производную. Полученная функция (если она существует) называется *второй производной от* $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

По индукции, *производная* $f^{(n)}(x)$ *порядка* n определяется как первая производная от производной $f^{(n-1)}(x)$ порядка $(n-1)$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Конечно, производная n-го порядка от данной функции f в данной точке x может существовать и не существовать.

Если говорят, что функция f имеет производную n-го порядка в точке x, то этим самым утверждают, что она имеет в достаточно малой окрестности точки x производную $f^{(n-1)}(x)$ порядка $(n-1)$, которая имеет производную в точке x. Эта последняя обозначается через $f^{(n)}(x)$ и называется производной порядка n от f в точке x.

Функция x^m, где m — целое положительное число, имеет на всей действительной оси производную любого порядка

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}.$$

При $n > m$ $(x^m)^{(n)} \equiv 0$.

Степенная функция x^a, где a — произвольное действительное число, имеет для $x > 0$ производную любого порядка n, определяемую по аналогичной формуле

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}. \tag{1}$$

Очевидно,

$$(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

и, в частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3}$$

Нетрудно проверить формулы

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{4}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Если $s = f(t)$ есть функция, выражающая зависимость прямолинейного пути, пройденного точкой, от времени t, то вторая производная $s'' = f''(t)$ есть ускорение точки в момент t. В дальнейшем мы увидим, что знание второй производной от функции имеет большое значение при изучении поведения ее графика.

Формула Лейбница. Если функция $f=uv$, где u и v в свою очередь функции, имеющие в некоторой точке производные порядка n, то f имеет производную n-го порядка в этой точке, выражаемую по формуле Лейбница:

$$f^{(n)}=uv^{(n)}+C_n^1u'v^{(n-1)}+C_n^2u''v^{(n-2)}+\ldots+u^{(n)}v=\sum_{l=0}^{n}C_n^l u^{(l)}v^{(n-l)}, \tag{6}$$

где C_n^l — биномиальные коэффициенты и $u^{(0)}=u$ (см. § 5.9, (6) и (7)).

Доказательство этой формулы проводится по индукции. При $n=1$ она очевидна. Если предположить, что она верна при n, то ее верность при $n+1$ получается из следующих выкладок:

$$f^{(n+1)}=\frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{n}C_n^l u^{(l)}v^{(n-l)}=\sum_{l=0}^{n}C_n^l\left(u^{(l+1)}v^{(n-l)}+u^{(l)}v^{(n-l+1)}\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{n+1}C_n^{l-1}u^{(l)}v^{(n+1-l)}+\sum_{l=0}^{n}C_n^l u^{(l)}v^{(n+1-l)}=\sum_{0}^{n+1}C_{n+1}^l u^{(l)}v^{(n+1-l)},$$

так как $C_{n+1}^0=C_n^0=C_n^n=C_{n+1}^{n+1}=1$ и $C_{n+1}^l=C_n^l+C_n^{l-1}$ ($l=1,\ldots$ $\ldots, n$).

Пример. $(x\sin x)^{100}=$

$$=x\sin\left(x+100\frac{\pi}{2}\right)+100\cdot 1\cdot\sin\left(x+99\frac{\pi}{2}\right)=x\sin x-100\cos x.$$

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную на некотором интервале $(a,\ b)$. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$y=\varphi(\psi(x))=f(x)\quad (x\in(a,\ b)). \tag{7}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная y есть функция ($y=f(x)$) от *независимой* переменной x; эта же самая переменная y есть функция от *зависимой* переменной u ($y=\varphi(u)$, $u\neq x$). Последняя зависит от независимой переменной x ($u=\psi(x)$). *Таким образом, роль переменной x здесь носит исключительный характер — она в этих рассуждениях будет фигурировать только как независимая переменная.*

Дифференциал от функции f

$$dy=f'(x)dx \tag{8}$$

мы будем также называть *первым дифференциалом от f в точке x, соответствующим дифференциалу (приращению) независимой переменной $dx=\Delta x$.*

Дифференциал n-го порядка от функции f в точке x, соответствующий дифференциалу независимой переменной $dx=\Delta x$, онределяется по индукции:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{9}$$

Таким образом, в этих равенствах дифференциалы d и d^{n-1} берутся для одного и того же дифференциала dx независимой переменной x, который при этом рассматривается как постоянная величина (не зависящая от x).

Из равенства (9) следует, что n-я производная от f в точке x есть отношение

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{10}$$

где в числителе $d^n y$ есть n-й дифференциал от y в точке x, соответствующий тому значению dx, которое стоит в знаменателе.

Пусть теперь переменная y рассматривается как функция от *зависимой* переменной $u (u \neq x)$, т. е. $y = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$, где φ и ψ имеют достаточное число производных. Тогда

$$dy = f'(x)dx = \varphi'(u)\psi'(x)dx = \varphi'(u)du, \tag{11}$$

и мы выразили первый дифференциал dy через u.

Равенство (11) замечательно вот с какой точки зрения. Мы определили дифференциал dy функции y как произведение производной от y по *независимой* переменной x на дифференциал dx. Оказывается, что dy можно определить так же, как произведение производной от y по *зависимой* переменной u на дифференциал du. При этом имеют место равенства

$$dy = y'_x dx = y'_u du, \tag{12}$$

если, конечно, дифференциал du, стоящий в третьем члене (12), соответствует именно тому dx, которое стоит во втором члене (12).

В этом смысле говорят, что форма $dy = \varphi'(u)du$ записи первого дифференциала *инвариантна относительно любой переменной* u. Для дифференциалов второго и более высокого порядка инвариантность уже не имеет места. Мы хотим этим сказать, что при $n > 1$ и $u \neq x$ $d^n y$, вообще говоря, не равняется $\varphi^{(n)}(u)du^n$, как это имеет место по определению в случае, когда $u = x$ есть независимая переменная.

В самом деле,

$$d^2 y = d(dy) = d(\varphi'(u)du) = d\varphi'(u)du + \varphi'(u)d^2u =$$
$$= \varphi''(u)(du)^2 + \varphi'(u)d^2u. \tag{13}$$

Теперь $d^2u \neq 0$ и членом $\varphi'(u)d^2u$ нельзя пренебречь, ведь $d^2u = \psi''(x)(dx)^2$. Таким образом, второй дифференциал, в отличие от первого, не имеет инвариантного характера.

То же явление (отсутствие инвариантности) имеет место и для дифференциалов более высокого порядка. Имеем

$$\begin{aligned} d^3y = d(d^2y) &= \varphi'''(u)(du)^3+\varphi''(u)d(du)^2+\varphi''(u)du\,d^2u+\varphi'(u)d^3u = \\ &= \varphi'''(u)(du)^3+\varphi''(u)2du\,d^2u+\varphi''(u)du\,d^2u+\varphi'(u)d^3u = \\ &= \varphi'''(u)(du)^3+3\varphi''(u)du\,d^2u+\varphi'(u)d^3u. \qquad (14)\end{aligned}$$

В этом же духе вычисляются дифференциалы более высокого порядка. К сожалению, с увеличением n соответствующее выражение для d^ny становится все более и более громоздким.

Пусть y есть функция от u, где u — зависимая переменная, т. е. в свою очередь есть функция от третьей переменной x. Явно эту последнюю зависимость u от x мы не хотим выражать. Больше того, мы можем ее вовсе не знать, а только предполагать, что такая зависимость есть. Требуется вычислить производные от y по u: $y'_u, y''_u, y'''_u, \ldots$

Мы уже знаем, что

$$y'_u = \frac{dy}{du} \qquad (du \neq 0), \qquad (15)$$

т. е. что производная от y по переменной u равна отношению дифференциалов: $dy:du$.

При вычислении производных более высокого порядка применяется это правило и правило вычисления дифференциалов от суммы, разности, произведения и частного (см. § 5.2, (4), (5), (6)). Кроме того, надо иметь в виду, что $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Имеем

$$y''_u = \frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{du} = \frac{1}{du}\,\frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^2} = \frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^3}. \qquad (16)$$

Левая часть (16) есть вторая производная от y по u, а правая часть есть определенное рациональное выражение от дифференциалов du, dy, d^2u, d^2y. Если $u = x$, т. е. независимая переменная, то $du = dx \neq 0$, а $d^2u = 0$, и из (16) следует уже известное нам равенство $y''_u = \frac{d^2y}{du^2}$, но если u есть функция от x, не равная x, то y''_u вычисляется по формуле (16).

Имеем также

$$y'''_u = \frac{d\left(\frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^3}\right)}{du} =$$

$$= \frac{du^3\,(d^2u\,d^2y + du\,d^3y - d^2y\,d^2u - dy\,d^3u) - (du\,d^2y - dy\,d^2u)\,3du^2d^2u}{du^7}. \qquad (17)$$

Добавление. *Производная от четной функции есть функция нечетная:*

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = -f'(x).$$

Аналогично *производная нечетной функции есть четная функция*. Поэтому производная порядка k от четной функции есть четная или нечетная функция в зависимости от того, будет ли k четным или нет.

§ 5.7. Возрастание и убывание функции на интервале и в точке. Локальный экстремум

Функция f называется *строго возрастающей на интервале* (a, b) (*или отрезке* $[a, b]$), если для любых точек x_1, x_2 из (a, b) (или $[a, b]$), удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция f называется *неубывающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что $x_1, x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) и $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Аналогично, функция f называется *строго убывающей*, соответственно *невозрастающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Тогда для достаточно малых Δx имеет смысл ее приращение в точке x:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

По определению, функция f:

1) *возрастает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{1}$$

2) *убывает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{2}$$

3) *достигает локального максимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \leqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta); \tag{3}$$

4) *достигает локального минимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \geqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta). \tag{4}$$

Подчеркнем, что все неравенства (1) — (4) должны соблюдаться для достаточно малых Δx, положительных и отрицательных.