Добавление. *Производная от четной функции есть функция нечетная:*

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = -f'(x).$$

Аналогично *производная нечетной функции есть четная функция.* Поэтому производная порядка k от четной функции есть четная или нечетная функция в зависимости от того, будет ли k четным или нет.

§ 5.7. Возрастание и убывание функции на интервале и в точке. Локальный экстремум

Функция f называется *строго возрастающей на интервале* (a, b) (*или отрезке* $[a, b]$), если для любых точек x_1, x_2 из (a, b) (или $[a, b]$), удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция f называется *неубывающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что x_1, $x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) и $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Аналогично, функция f называется *строго убывающей*, соответственно *невозрастающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что $x_1 < x_2$, x_1, $x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Тогда для достаточно малых Δx имеет смысл ее приращение в точке x:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

По определению, функция f:

1) *возрастает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{1}$$

2) *убывает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{2}$$

3) *достигает локального максимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \leqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta); \tag{3}$$

4) *достигает локального минимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \geqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta). \tag{4}$$

Подчеркнем, что все неравенства (1) — (4) должны соблюдаться для достаточно малых Δx, положительных и отрицательных.

Указанные четыре свойства можно еще выразить так: для всех точек $x' \in (x-\delta, x)$ и для всех точек $x'' \in (x, x+\delta)$ имеет место:

в случае 1) $f(x') < f(x) < f(x'')$,
2) $f(x') > f(x) > f(x'')$;

и для всех точек $x' \in (x-\delta, x+\delta)$:

в случае 3) $f(x') \leqslant f(x)$,
4) $f(x') \geqslant f(x)$,

т. е. в случае 3) значение f в точке x *является максимальным в достаточно малой окрестности* x и в случае 4) значение f в точке x *является минимальным в достаточно малой окрестности* x.

Локальные максимум или минимум называют локальным *экстремумом.*

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос, как узнать, что имеет место тот или иной из приведенных четырех случаев, если известны производные от f первого или более высокого порядка в точке x или по соседству с ней.

Допустим, что функция f в точке x имеет положительную производную: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$. Таким образом, величина $\Delta y/\Delta x$, являющаяся при фиксированном x функцией от Δx, стремится к положительному числу. Но тогда (см. теорему 2 § 4.1) и сама эта величина должна быть положительной для всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, при достаточно малом δ, т. е. согласно определению 1) функция f в точке x должна возрастать.

Аналогично доказывается, что если $f'(x) < 0$, то f убывает в точке x. Мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Если функция f в точке x имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) в этой точке.*

Из этой теоремы немедленно следует

Теорема Ферма́. *Если функция f достигает в точке x локального экстремума (максимума или минимума) и в ней существует производная $f'(x)$, то последняя равна нулю ($f'(x) = 0$).*

В самом деле, если бы $f'(x) \neq 0$, то в силу предыдущей теоремы функция должна была бы быть возрастающей или убывающей в точке x, что исключает возможность существования экстремума функции в этой точке.

Эту теорему можно сформулировать и так:

Для того чтобы функция f, имеющая в точке x производную, достигала в ней локального экстремума, необходимо, чтобы производная от f в этой точке была равной нулю.

Конечно, условия $f'(x) = 0$ недостаточно, чтобы функция имела в x локальный экстремум. Если $f'(x) = 0$, то функция f может не иметь локального экстремума в точке x. Она может в этой точке возрастать, как это имеет место, например, для функции x^3 при $x=0$, убывать (например, $f(x)=-x^3$ при $x=0$), а может точка x и не быть ни точкой возрастания ни убывания, ни точкой экстремума функции. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases} \tag{5}$$

имеет производную $f'(0)=0$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$\left(\text{ведь } \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\right)$. С другой стороны, в любой как угодно малой окрестности $|x|<\delta$ точки 0 как справа, так и слева от нее f принимает положительные и отрицательные значения. Поэтому точка 0 не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания, ни точкой экстремума функции f.

В следующем параграфе мы переходим к очень важным теоремам, называемым теоремами о среднем. С их помощью будет весьма удобно получить дальнейшие заключения, относящиеся к теории локальных экстремумов.

§ 5.8. Теоремы о среднем значении. Критерии возрастания и убывания функции на интервале. Достаточные критерии локальных экстремумов

Теорема Ролля*). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах его ($f(a)=f(b)$).*

Тогда на интервале (a, b) есть хотя бы одна точка c, где производная от f равна нулю ($f'(c)=0$).

Доказательство. Пусть M и m соответственно максимум и минимум f на отрезке $[a, b]$. Они существуют в силу непрерывности f на $[a, b]$. Если выполняются равенства $M=m=f(a)$, то $f(x)=M$ для всех $x\in[a, b]$ и $f'(c)=0$ в любой точке $c\in(a, b)$. Если же указанные равенства одновременно не выполняются, то по крайней мере одно из чисел M или m отлично от числа $f(a)=f(b)$, пусть для определенности M. Но тогда максимум функции f на отрезке $[a, b]$ достигается в некоторой точке c интервала (a, b) и, следовательно, в этой точке f имеет также локальный максимум. Так как в точке c производная $f'(c)$ суще-

*) М. Ролль (1652—1719) — французский математик, доказавший эту теорему для многочленов.