жет не иметь локального экстремума в точке x. Она может в этой точке возрастать, как это имеет место, например, для функции x^3 при $x=0$, убывать (например, $f(x)=-x^3$ при $x=0$), а может точка x и не быть ни точкой возрастания ни убывания, ни точкой экстремума функции. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{5}$$

имеет производную $f'(0)=0$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$\left(\text{ведь } \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\right)$. С другой стороны, в любой как угодно малой окрестности $|x|<\delta$ точки 0 как справа, так и слева от нее f принимает положительные и отрицательные значения. Поэтому точка 0 не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания, ни точкой экстремума функции f.

В следующем параграфе мы переходим к очень важным теоремам, называемым теоремами о среднем. С их помощью будет весьма удобно получить дальнейшие заключения, относящиеся к теории локальных экстремумов.

§ 5.8. Теоремы о среднем значении. Критерии возрастания и убывания функции на интервале. Достаточные критерии локальных экстремумов

Теорема Ролля*). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах его ($f(a)=f(b)$).*

Тогда на интервале (a, b) есть хотя бы одна точка c, где производная от f равна нулю ($f'(c)=0$).

Доказательство. Пусть M и m соответственно максимум и минимум f на отрезке $[a, b]$. Они существуют в силу непрерывности f на $[a, b]$. Если выполняются равенства $M=m=f(a)$, то $f(x)=M$ для всех $x\in[a, b]$ и $f'(c)=0$ в любой точке $c\in(a, b)$. Если же указанные равенства одновременно не выполняются, то по крайней мере одно из чисел M или m отлично от числа $f(a)=f(b)$, пусть для определенности M. Но тогда максимум функции f на отрезке $[a, b]$ достигается в некоторой точке c интервала (a, b) и, следовательно, в этой точке f имеет также локальный максимум. Так как в точке c производная $f'(c)$ суще-

*) М. Ролль (1652—1719) — французский математик, доказавший эту теорему для многочленов.

ствует, то по теореме Ферма она равна нулю. Случай $m \neq f(a)$ разбирается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема о среднем Коши. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и имеют производные на интервале* (a, b) *одновременно не обращающиеся в нуль. При этом* $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ *).

Тогда на интервале (a, b) *найдется точка* c, *для которой выполняется равенство*

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a<c<b). \tag{1}$$

Доказательство. Вводим функцию

$$F(x)=[\psi(b)-\psi(a)]\varphi(x)-[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi(x).$$

Она, очевидно, непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Кроме того, $F(a)=F(b)$. Поэтому по теореме Ролля найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $F'(c)=0$, т. е.

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi'(c)=[\psi(b)-\psi(a)]\varphi'(c). \tag{2}$$

Число $\varphi'(c) \neq 0$, потому что в противном случае, в силу того, что $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$, было бы $\psi'(c)=0$, но $\varphi'(c)$ и $\psi'(c)$ по условию одновременно не равны нулю. Поэтому произведение $[\varphi(b) - \varphi(a)]\varphi'(c) \neq 0$. Разделив на него левую и правую части равенства (2), получим (1).

Как следствие из теоремы Коши при $\varphi(x)=x$ и $\psi=f$ получим теорему Лагранжа:

Теорема о среднем Лагранжа **). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и имеет производную на интервале* (a, b). *Тогда существует на интервале* (a, b) *точка* c, *для которой выполняется равенство*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \quad (a<c<b). \tag{3}$$

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл, если записать ее в таком виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b).$$

Левая часть этого равенства есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y=f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой промежуточной точке $c \in (a, b)$. Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая (рис. 5.5) есть график непрерывной на $[a, b]$ функции, имеющей производную

*) Заметим, что, например, условие $\varphi'(x) \neq 0$ на (a, b) влечет за собой $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$.

**) Ж. А. Лагранж (1736—1813) — французский математик.

на (a, b), то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе $c(a<c<b)$ такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Равенство (3) называется *формулой (Лагранжа) конечных приращений.* Промежуточное значение c удобно записывать в виде

$$c = a + \theta(b-a),$$

где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0<\theta<1$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a + \theta(b-a)) \quad (0<\theta<1). \tag{4}$$

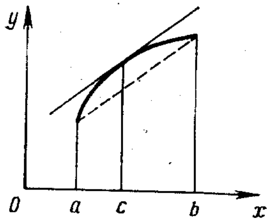

Рис. 5.5.

Она верна, очевидно, не только для $a<b$, но и для $a \geqslant b$.

Теорема 1. *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеющая неотрицательную (положительную) производную на интервале (a, b), не убывает (строго возрастает) на $[a, b]$.*

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому найдется на интервале (x_1, x_2) точка c, для которой

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \quad (x_1 < c < x_2).$$

Если по условию $f' \geqslant 0$ на (a, b), то $f'(c) \geqslant 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0; \tag{5}$$

если же $f' > 0$ на (a, b), то $f'(c) > 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) > 0. \tag{6}$$

Так как неравенства (5) и (6) имеют место, каковы бы ни были x_1, x_2, где $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то в первом случае f не убывает, а во втором f строго возрастает на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2. *Если функция имеет на интервале (a, b) производную, равную нулю, то она постоянна на (a, b).*

В самом деле, на основании теоремы Лагранжа имеет место

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1) f'(c),$$

где x_1 — фиксированная точка интервала (a, b), x — произвольная его точка (она может находиться справа и слева от x_1) и c — некоторая, зависящая от x_1 и x точка, находящаяся между x_1 и x. Так как по условию $f'(x) \equiv 0$ на (a, b), то $f'(c) = 0$ и $f(x) = f(x_1) = C$ для всех $x \in (a, b)$.

Заметим, что в приведенных теоремах ослабление налагаемых в них условий может привести к неверности утверждений.

Например, функция $f(x)$, определяемая равенствами

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1 \end{cases}$$

(рис. 5.6), очевидно, непрерывна на отрезке $[0, 1]$, равна нулю на его концах и имеет производную во всех точках $(0, 1)$, за исключением только одной точки $x=\frac{1}{2}$, и для нее уже, очевидно, не выполняется теорема Лагранжа.

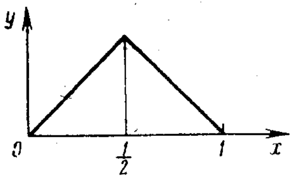

Рис. 5.6.

Докажем теорему, которая дает достаточный критерий существования локального экстремума функции.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна в окрестности точки x_0 и имеет производную*

$$f'(x)\geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \textit{справа от } x_0,$$
$$f'(x)\leqslant 0 \quad (\geqslant 0) \quad \textit{слева от } x_0,$$

то x_0 есть точка локального минимума (максимума) f.

Выражение *справа* (*слева*) *от* x_0 означает «на достаточно малом интервале с левым (правым) концом x_0». Доказательство непосредственно следует из формулы конечных приращений.

$$\Delta f=f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0+\theta(x-x_0)),$$

потому что из условий теоремы следует, что правая часть формулы неотрицательна (неположительна) в достаточно малой окрестности точки x_0 независимо от знака $x-x_0$.

Заметим, что в этой теореме существование производной в самой точке x_0 не предполагалось. Конечно, если производная $f'(x_0)$ существует, то по теореме Ферма она равна нулю.

Следующая теорема дает достаточный критерий существования локального экстремума функции по знаку второй производной.

Теорема 4. *Если функция f удовлетворяет условиям $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), то x_0 есть точка локального минимума (максимума) функции f.*

Доказательство. Существование второй производной в точке x_0 влечет за собой существование первой производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0 и, тем более, непрерывность f в этой окрестности. Из того, что $f''(x_0)>0$ (<0) следует, что $f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0 и, так как $f'(x_0)=0$, то справа от x_0 $f'>0$ (<0), а слева от x_0 $f'<0$ (>0). Теперь утверждение теоремы следует из предыдущей теоремы.

Мы знаем, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая всюду на интервале (a, b) положительную производную, строго возрастает на отрезке $[a, b]$. С другой стороны, пример, который приводится ниже, показывает, что если непрерывная в окрестности точки $x=0$ функция f имеет положительную производную в этой точке, то отсюда не следует, что f возрастает в некоторой достаточно малой окрестности $x=0$.

Таким образом, возрастание функции в точке не влечет, вообще говоря, ее возрастание в некоторой ее окрестности.

Пример 1. Функция $F(x)=\frac{x}{2}+f(x)$, где f определяется равенством (5) предыдущего параграфа, имеет производную $F'(0)=\frac{1}{2}+f'(0)=1/2>0$ в точке $x=0$ и, следовательно, возрастает в этой точке. В то же время она не возрастает на любом интервале, содержащем эту точку. Действительно, для $x\neq 0$

$$F'(x)=\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

При $x_k=1/k\pi$ $(k=1, 2, \ldots)$

$$F'(x_k)=\frac{1}{2}-(-1)^k,$$

откуда видно, что в любом интервале, содержащем в себе нулевую точку, производная F' принимает значения разных знаков и, следовательно, F не изменяется на нем монотонно.

Пример 2. На отрезке $[-1, e]$ дана функция

$$\psi(x)=\begin{cases} x\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Она непрерывна, имеет конечную производную всюду на $[-1, e]$, за исключением $x=0$, где

$$\psi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(h)-\psi(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\ln|h|=-\infty. \tag{7}$$

Из (7) следует, что ψ в точке $x=0$ убывает. Уравнение $\psi'(x)=1+\ln|x|=0$ имеет два корня: $x_1=-1/e$, $x_2=1/e$. Кроме того, $\psi''(x)=1/x$ $(x\neq 0)$ и $\psi''(-1/e)<0$, $\psi''(1/e)>0$, следовательно, $-1/e$ есть точка локального максимума, а $1/e$ — точка локального минимума.

Пример 3. График функции (см. § 8.9)

$$x=\frac{t^2-a}{b+2t\sqrt{c}} \quad (b^2-4ac<0,\ c>0)$$

распадается на две непрерывные ветви, соответствующие изменению t на $(-\infty, -b/2\sqrt{c})$, $(-b/2\sqrt{c}, \infty)$. На каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Это легко видеть, если учесть, что в силу условия $b^2-4ac>0$ производная $x'>0$ и при $t=-b/2\sqrt{c}$ выражение $(t^2-a)=\frac{b^2}{4c}-a<0$.