§ 5.9. Формула Тейлора

При помощи формулы Тейлора*) можно по данным значениям $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n-1)}(a)$ функции f и ее производных в точке a и некоторым сведениям о производной $f^{(n)}$ в окрестности этой точки узнать приближенно, часто с большой точностью, значение f в точках этой окрестности.

Средством приближения являются специально строящиеся по указанным значениям многочлены, называемые *многочленами Тейлора* данной *функции*.

Мы начнем с того, что выведем формулу Тейлора для многочлена

$$P(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n. \tag{1}$$

Зададим произвольное число a и в правой части равенства (1) произведем замену x на $(x-a)+a$:

$$P(x) = b_0 + b_1[(x-a)+a] + \ldots + b_n[(x-a)+a]^n.$$

Затем раскроем квадратные скобки и приведем подобные при одинаковых степенях $x-a$. В результате получим равенство

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1(x-a) + \ldots + \beta_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k, \tag{2}$$

где β_k — постоянные, зависящие от исходных коэффициентов b_k.

Равенство (2) называется *разложением многочлена* $P(x)$ *по степеням* $x-a$, а числа β_k называются коэффициентами данного разложения.

С этой точки зрения исходное равенство (1) можно трактовать как разложение $P(x)$ по степеням x, т. е. по степеням $x-a$, где $a=0$.

Будем последовательно дифференцировать равенство (2):

$$P'(x) = \beta_1 + 2\beta_2(x-a) + 3\beta_3(x-a)^2 + \ldots,$$
$$P''(x) = 2\beta_2 + 3\cdot 2\beta_3(x-a) + 4\cdot 3\beta_4(x-a)^2 + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(k)}(x) = k!\beta_k + (k+1)k\ldots 2\beta_{k+1}(x-a) + \ldots$$

В последнем равенстве, определяющем k-ю производную, положим $x=a$. Тогда в правой части все члены, начиная со второго, обратятся в нуль, и мы получим $P^{(k)}(a) = k!\beta_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. При этом, как обычно, мы считаем, что $P^{(0)}(a) = P(a)$, $0! = 1$. Итак, коэффициенты β_k разложения (2) многочлена $P(x)$ по степеням $x-a$ необходимо выражаются по формуле

$$\beta_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{3}$$

*) Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.

Отсюда, в частности, следует, что один и тот же многочлен $P(x)$ степени n можно разложить по степеням $x-a$ единственным образом, т. е., если для всех значений x

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{n}\beta'_k(x-a)^k,$$

где β_k, β'_k — постоянные, то

$$\beta_k=\beta'_k \quad (k=0,1,\ldots,n).$$

Ведь как числа β_k, так и β'_k вычисляются по одной и той же формуле (3).

Итак,

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *формулой Тейлора по степеням $x-a$ для многочлена $P(x)$ степени n.*

Формулу Тейлора по степеням x, т. е. выражение

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k, \qquad (5)$$

называют также формулой Маклорена.

Пример 1. Бином Ньютона. Рассмотрим многочлен n-й степени

$$P(x)=(a+x)^n,$$

где a — произвольное число, а n — натуральное число. Его k-я производная равна

$$P^{(k)}(x)=n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$

откуда $P^{(k)}(0)=n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k}$ и, следовательно, на основании формулы Маклорена для многочлена n-й степени будем иметь

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{(n-1)!}ax^{n-1}+x^n. \qquad (6)$$

Это равенство называется *формулой бинома Ньютона.*

Если ввести обычное обозначение

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \qquad C_n^n=C_n^0=1, \qquad (7)$$

то формула бинома Ньютона может быть записана в более компактной форме:

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}x^k. \qquad (6')$$

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами.*

Отметим, что если числитель и знаменатель дроби в (7) помножить на $(n-k)!$, то получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 1}{k!\,(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots n). \tag{7'}$$

Случай $k=0$ тоже включается в эту формулу. Ведь $0! = 1$.

Другое важное свойство биномиальных коэффициентов выражается равенством

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Доказательство его предоставляем читателю. Если учесть, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, то с помощью последнего равенства можно легко получить последовательно числа C_n^k для любых n и k, всякий раз пользуясь только одним действием сложения.

Выше мы вывели формулу Тейлора для многочлена. Пусть теперь в окрестности точки a задана функция f, не являющаяся многочленом степени $n-1$, но имеющая там производные до n-го порядка включительно *).

Вычислим числа $f(a), f'(a), \dots, f^{(n-1)}(a)$ и составим при их помощи функцию

$$Q(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{8}$$

Очевидно, Q есть многочлен степени $n-1$. Он называется *многочленом Тейлора*, именно $(n-1)$*-м многочленом Тейлора, функции* f по степеням $(x-a)$.

Если бы исходная функция f сама была многочленом степени $n-1$, то, как мы установили, выполнялось бы тождество $f(x) = Q(x)$ для всех значений x из нашей окрестности. Но в данном случае это тождество не имеет места, ведь мы предположили, что f не есть многочлен степени $n-1$. Это не мешает многочлену Q быть тесно связанным с f. В самом деле, разложим многочлен Q по формуле Тейлора:

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{9}$$

*) На самом деле все выводы в этом параграфе проходят при менее ограничительных условиях, налагаемых на f (см. ниже формулировку теоремы 1).

Так как (8) и (9) суть разложения по степеням $x-a$ одного и того же многочлена, то

$$f^{(k)}(a)=Q^{(k)}(a) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{10}$$

Итак, $(n-1)$-й многочлен Тейлора от функции f можно определить еще и как такой многочлен степени $n-1$, для которого выполняется n равенств (10).

Пример 2. На рис. 5.7 изображена кривая $y=f(x)$. В качестве ее нулевого приближения в окрестности точки $a=0$ естественно взять график ее нулевого многочлена Тейлора $y=Q_0(x)$, представляющий собой прямую $y=f(0)$, параллельную оси x. В качестве же первого приближения к нашей кривой естественно взять касательную к ней в точке $x=0$. Ее уравнение есть $y=Q_1(x)$, где $Q_1(x)=f(0)+f'(0)x$. Следующее приближение — это второе приближение $y=Q_2(x)$, где $Q_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$. Это многочлен Тейлора по степеням x второй степени, т. е. такой многочлен второй степени, что он и его производные первого и второго порядка в точке 0 совпадают соответственно с $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

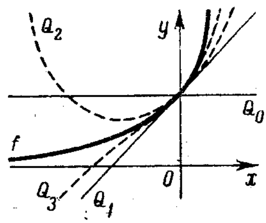

Рис. 5.7.

Мы видим, что графики последующих многочленов Тейлора функции f по степеням x прилегают все теснее и теснее к графику f, во всяком случае, в достаточно малых окрестностях точки $a=0$, если, конечно, функция в ней достаточно много раз дифференцируема.

Положим

$$f(x)=Q_{n-1}(x)+R_n(x), \tag{11}$$

где Q_{n-1} есть $(n-1)$-й многочлен Тейлора функции f по степеням $x-a$.

Равенство (11) называется *формулой Тейлора функции f в окрестности точки a*, а $R_n(x)$ называется *остаточным членом* или *n-м остатком* рассматриваемой формулы Тейлора.

Замечательно, что для остаточного члена можно дать нетривиальные выражения через n-ю производную от f. Ниже мы выведем два таких выражения: *остаточный член в форме Лагранжа и остаточный член в форме Коши.*

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа выглядит следующим образом:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad \xi\in(a,x),$$

где ξ есть некоторая (зависящая от x и n) точка интервала $(a,\ x)$. Здесь и далее x можно считать не только бо́льшим, но и ме́ньшим, чем a*). Обычно точное значение ξ неизвестно, утверждается лишь, что ξ находится где-то на интервале $(a,\ x)$.

*) Если $x<a$, то $(a,\ x)$, $[a,\ x]$ обозначают множества точек t, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x<t<a$, $x\leqslant t\leqslant a$.

Бывает удобно число ξ записать в виде $\xi = a + \theta(x-a)$, где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$. При таком обозначении остаточный член в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши выглядит так:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \qquad 0 < \theta < 1,$$

где θ — число, зависящее от x и n.

Отметим, что при $n = 1$ формула Тейлора функции с остаточным членом в форме Лагранжа (или Коши) есть уже известная нам формула Лагранжа о среднем значении:

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Соответствующая теорема гласит:

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, x]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно и имеет производную порядка n на интервале (a, x).*

Тогда ее n-й остаточный член формулы Тейлора может быть записан в форме Лагранжа или в форме Коши.

Доказательство. Зададим произвольное натуральное число p и указанное в теореме значение x. Предупредим, что на протяжении доказательства x будет оставаться неизменным. Нам будет удобно ввести новую вспомогательную переменную u. По отношению к ней x будет рассматриваться как постоянная.

Мы ставим своей задачей найти удобное выражение для остатка $R_n(x)$ в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x).$$

Коротко будем говорить, что мы ищем $R_n(x)$, т. е. значение остатка в точке x. Для этого представим $R_n(x)$ в виде произведения $R_n(x) = (x-a)^p H$, сведя таким образом вопрос к отысканию величины H. Величина H зависит от x и в силу сделанного соглашения будет рассматриваться как постоянная.

Итак, мы имеем равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^p H.$$

Заменим чисто формально в правой его части постоянную a на переменную u. Тогда получим функцию

$$\Phi(u) = \sum_{0}^{n-1} \frac{(x-u)^k}{k!} f^{(k)}(u) + (x-u)^p H =$$

$$= f(u) + \frac{x-u}{1} f'(u) + \ldots + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(u) + (x-u)^p H, \quad (12)$$

которая во всяком случае определена и непрерывна для всех значений u, принадлежащих отрезку $[a, x]$, потому что на этом отрезке непрерывна исходная функция $f(u)$ вместе со своими производными до $(n-1)$-й включительно. Кроме того, из определения функции $\Phi(u)$ следует, что при $u=a$ она принимает значение $f(x)$ $(\Phi(a)=f(x))$. Больше того, при $u=x$ она также обращается в $f(x)$ $(\Phi(x)=f(x))$, что непосредственно видно из правой части (12): если положить в ней $u=x$, все члены обращаются в нуль, кроме первого, равного $f(x)$. Наконец, наша функция $\Phi(u)$ имеет на интервале (a, x) производную, потому что на нем имеет производную n-го порядка исходная функция f.

Мы видим, что наша вспомогательная функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля — она непрерывна на отрезке $[a, x]$, имеет производную на интервале (a, x) и принимает равные значения на его концах. Но тогда согласно теореме Ролля существует между a и x промежуточная точка $u=a+\theta(x-a)$ такая, что производная Φ' в ней равна нулю.

Найдем фактически эту производную:

$$\Phi'(u) = f'(u) - f'(u) + (x-u) f''(u) - (x-u) f''(u) + \ldots$$

$$\ldots - \frac{(x-u)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(u) + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) - p(x-u)^{p-1}H.$$

В этом выражении все члены сокращаются, за исключением последних двух. Если в оставшееся выражение подставить указанное значение $u=a+\theta(x-a)$, то, как было сказано, оно обратится в нуль.

Решая полученное уравнение относительно H и умножая найденное H на $(x-a)^p$, получим искомое выражение для остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!\,p} (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a)).$$

Это выражение зависит от p, где p может быть любым натуральным числом. Если в нем положить $p=n$, то получим остаточный член в форме Лагранжа, а если положить $p=1$, то в форме Коши.

Отметим, что при $a=0$ формулу Тейлора называют также *формулой Маклорена*. В этом случае она имеет вид

$$f(x)=\sum_{0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x), \tag{13}$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \text{ — форма Лагранжа,}$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x) \text{ — форма Коши.}$$

Предположим теперь, что функция f имеет в точке a непрерывную производную $f^{(n)}$ порядка n. Отсюда следует, что существует некоторая окрестность точки a, на которой функция f имеет производную $f^{(n)}$ и тем более непрерывную производную $f^{(n-1)}$. Таким образом, условия для разложения f по формуле (13) с остатком в форме Лагранжа соблюдены, и можно написать, учитывая предположенную непрерывность $f^{(n)}$ при $x=a$, что

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a))=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+r_n(x) \tag{14}$$

и

$$r_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a+\theta(x-a))-f^{(n)}(a)\right]=(x-a)^n o(1)=$$
$$=o\left((x-a)^n\right) \qquad (x\to a).$$

Следовательно,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right) \qquad (x\to a). \tag{15}$$

Разложение (15) называют *формулой Тейлора разложения функции f по степеням $(x-a)$ с остаточным членом в форме Пеано* *).

Мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Если функция f имеет непрерывную производную порядка n в точке a, то она разлагается по формуле* (15) *Тейлора по степеням $x-a$ с остаточным членом в форме Пеано.*

Докажем лемму.

Л е м м а. *Из равенства*

$$\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\ldots+\alpha_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)=\alpha_0'+\alpha_1'(x-a)+$$
$$+\ldots+\alpha_n'(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right), \quad x\to a, \tag{16}$$

где α_k, α_k' — числа, не зависящие от x, следует, что

$$\alpha_k=\alpha_k' \quad (k=0,1,\ldots,n). \tag{17}$$

*) Д. Пеано (1852—1932) — итальянский математик.

Действительно, возьмем предел левой и правой частей (16) при $x \to a$. Тогда получим равенство $\alpha_0 = \alpha_0'$. Таким образом, можно считать, что в (16) слагаемых α_0, α_0' нет, и можно (16) сократить на $x - a$ и получить равенство

$$\alpha_1 + \alpha_2(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^{n-1} + o\left((x-a)^{n-1}\right) =$$
$$= \alpha_1' + \alpha_2'(x-a) + \ldots + \alpha_n'(x-a)^{n-1} + o\left((x-a)^{n-1}\right),$$

откуда после перехода к пределу при $x \to a$ получим еще, что $\alpha_1 = \alpha_1'$. Продолжая этот процесс последовательно, мы получим (17) и лемма доказана.

Из доказанной леммы и сказанного выше следует *единственность разложения функции f по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано.* Эти слова надо понимать в следующем смысле. Если функция f, имеющая в точке $x = a$ непрерывную производную n-го порядка, представлена в виде

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \to a, \tag{18}$$

где α_k — постоянные числа, то эти числа равны

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

т. е. (18) есть тейлорово разложение f с остатком в форме Пеано.

Формула Тейлора в окрестности $x = 0$ четной (нечетной) функции f содержит в себе члены только четной (нечетной) степени x:

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots,$$
$$(f(x) = a_1x + a_3x^3 + \ldots).$$

Это следует из того, что нечетные производные от четной функции, так же как четные производные от нечетных функций, суть нечетные функции (см. конец § 5.6). Но последние к тому же предполагаются непрерывными в точке $x = 0$, но тогда они необходимо равны нулю в этой точке.

В частности, с помощью этого утверждения легко следует, что *для того чтобы многочлен*

$$P(x) = \sum_0^n \alpha_k x^k$$

был четным (нечетным), т. е. четной (нечетной) функцией, необходимо и достаточно, чтобы все его члены имели x в четной (нечетной) степени.

Пример 3. Из равенства $1+x^2+\ldots+x^{2m}=(1-x^{2m+2})/(1-x^2)$ и того факта, что $x^{2m+2}/(1-x^2)=o(x^{2m})$ $(x\to 0)$, следует, что

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+\ldots+x^{2m}+o\left(x^{2m}\right)\quad(x\to 0). \tag{19}$$

Но тогда (19) есть формула Тейлора функции $(1-x^2)^{-1}$ по степеням x с остаточным членом в форме Пеано.

§ 5.10. Формулы Тейлора для важнейших элементарных функций

Функция $f(x)=e^x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0)=1,\quad f^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому формула Тейлора по степеням x функции e^x с остатком, в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}\quad(0<\theta<1).$$

Если положить в ней $x=1$, то получим приближенное выражение для e:

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$$

с ошибкой $|R_n(1)|\leqslant\frac{1}{n!}e<\frac{3}{n!}$.

При любом $x\geqslant 0$

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{x^n}{n!}e^x\to 0\qquad(n\to\infty)$$

и при $x<0$

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}\to 0\qquad(n\to\infty).$$

Функция $f(x)=\sin x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\qquad(n=1,2,\ \ldots).$$

Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом Лагранжа имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{n!}+\ldots+(1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}+R_{2\nu+1}(x),$$

$$R_{2\nu+1}(x)=\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\sin\left(\theta x+(2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right).$$