Г л а в а 6

n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГЕОМЕТРИЯ КРИВОЙ

§ 6.1. n-мерное пространство. Линейное множество

Произвольную упорядоченную систему $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных (комплексных) чисел x_j называют *вектором* или *точкой n-мерного действительного* (*комплексного*) *пространства* R_n. Таким образом, R_n есть множество всех указанных $\mathbf{x}$.

Векторы (точки) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in R_n$ мы будем складывать и вычитать и умножать на них действительные (комплексные) числа, руководствуясь следующим правилом: если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ и α, β — действительные (комплексные) числа, то

$$\alpha\mathbf{x} \pm \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 \pm \beta y_1, \ldots, \alpha_n x_n \pm \beta_n y_n).$$

Вектор (точку) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ называют *нулевым вектором* (*точкой*) R_n. Очевидно, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in R_n$. Полагают еще $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ и тогда, очевидно, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

В приложениях (в геометрии, в механике) говорят, что $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ есть вектор, начало которого есть нулевая точка, а конец — точка $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. В двумерном и трехмерном случае ($n = 2, 3$) такая терминология имеет наглядный смысл.

Непосредственно проверяется выполнение следующих свойств ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in R_n$, α, β — действительные (комплексные *)) числа):

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
3) из $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ следует $\mathbf{y} = \mathbf{z}$,
4) $\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y})$,
5) $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} = (\alpha + \beta)\mathbf{x}$,
6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$,
7) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Множество E элементов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ... любой природы называется *линейным действительным* (*комплексным*) *множеством*, если для любых двух элементов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$ в силу некоторого закона определен элемент $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E$, называемый их *суммой*, и если для любого действительного (комплексного) числа α и любого элемента $\mathbf{x} \in E$ определен также элемент $\alpha\mathbf{x} \in E$ (*произведение* α *на* $\mathbf{x}$) и при этом выполняются перечисленные выше свойства (аксиомы) 1)—7).

Из сказанного следует, что R_n *можно рассматривать как пример линейного множества.* Но существуют и многие другие такие

*) О комплексных числах см. § 8.2.

примеры. Множество всех последовательностей действительных или комплексных чисел $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, \ldots\}$, если считать, что

$$\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \ldots\}, \quad \mathbf{y}=\{y_1, y_2, \ldots\},$$

есть линейное множество. Его подмножество, состоящее из сходящихся к конечным числам последовательностей, с тем же определением сложения и умножения на число, очевидно, также есть линейное множество. Множество C всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f (действительных или комплексных), если считать, как обычно, что

$$\alpha f+\beta\varphi=\alpha f(x)+\beta\varphi(x) \quad (f, \varphi\in C),$$

есть тоже, очевидно, линейное множество.

Наконец, множество многочленов $P_n(x)=\sum_0^n a_k x^k$ степени не выше n есть также линейное множество, если понимать их сложение и умножение на число в обычном смысле.

В списке аксиом 1) — 7) ничего не говорится явно о вычитании элементов и о нулевом элементе. На самом деле эти понятия возникают на основе этих аксиом. Положим $\theta_{\mathbf{x}}=0\cdot\mathbf{x}$; тогда $\mathbf{x}+\theta_{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+0\cdot\mathbf{x}=1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

Аналогично определяем $\theta_{\mathbf{y}}=0\cdot\mathbf{y}$; для него также $\mathbf{y}+\theta_{\mathbf{y}}=\mathbf{y}$. Далее,

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}+\theta_{\mathbf{y}}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\theta_{\mathbf{y}})=\mathbf{x}+\mathbf{y},$$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}+\theta_{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+(\theta_{\mathbf{x}}+\mathbf{y})=(\mathbf{x}+\theta_{\mathbf{x}})+\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{y}.$$

Но тогда (аксиома 3)) $\theta_{\mathbf{x}}=\theta_{\mathbf{y}}=\theta$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in E$. Итак, θ есть нулевой элемент в E, так как для любого $\mathbf{x}\in E$ имеет место $\mathbf{x}+\theta=\mathbf{x}$. Положим теперь $-\mathbf{x}=(-1)\mathbf{x}$; тогда $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=(1-1)\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\theta$. Вычитание $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ двух элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in E$ определяется при помощи равенства $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$. Это действие, обратное действию сложения:

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y})+\mathbf{y}=\mathbf{x}+[(-\mathbf{y})+\mathbf{y}]=\mathbf{x}+\theta=\mathbf{x}.$$

§ 6.2. Евклидово n-мерное пространство. Пространство со скалярным произведением

Пусть R_n есть действительное или комплексное n-мерное пространство. Произвольным его точкам (векторам)

$$\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$$

приведем в соответствие число

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{j=1}^n x_j\overline{y}_j, \tag{1}$$

называемое *скалярным произведением векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Здесь черта над y_j есть знак комплексного сопряжения. В случае действительного пространства y_j действительны и $\overline{y}_j=y_j$.

Скалярное произведение, очевидно, обладает следующими свойствами: