§ 6.10. Соприкасающаяся плоскость и подвижный триэдр кривой

Соприкасающейся плоскостью к кривой Γ в ее точке A называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную к Γ в точке A параллельно касательной в другой точке B кривой, когда последняя, двигаясь по кривой, стремится к A.

Покажем, что если кривая $\mathbf{r}(t)$ имеет непрерывную производную $\dot{\mathbf{r}}$ в окрестности точки t_0 и, кроме того, вторую производную $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$ такую, что $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$, то соприкасающаяся плоскость к этой кривой в точке $t = t_0$ существует и имеет уравнение

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0)[\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0] = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор текущей точки плоскости.

В самом деле, положим

$$\Delta\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

Тогда вектор $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \dfrac{\Delta\dot{\mathbf{r}}_0}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}$, ортогонален (перпендикулярен) к приложенным к точке A векторам $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t)$, а следовательно, и к проходящей через них плоскости. Так как он стремится при $\Delta t \to 0$ к вектору $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 \neq \mathbf{0}$, то и указанная плоскость стремится к плоскости, проходящей через A, перпендикулярной к $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}$, а это и есть соприкасающаяся плоскость к Γ в A. Ее уравнение, очевидно, есть (1).

Существует еще другое определение: *соприкасающейся плоскостью кривой Γ в точке A называется предельное положение подвижной плоскости, проходящей через точку A и две другие точки A_1, A_2 кривой Γ, когда последние, двигаясь по Γ, стремятся к A.*

Можно показать, что при условиях, наложенных выше на $\mathbf{r}(t)$, в окрестности точки t_0 существует соприкасающаяся плоскость к Γ в этой точке и в смысле этого второго определения и она определяется уравнением (1). Таким образом, она совпадает с соприкасающейся плоскостью в смысле первого определения.

В декартовых координатах уравнение (1) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

где x, y, z — текущие координаты соприкасающейся плоскости, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = (x_0', y_0', z_0')$ и $\ddot{\mathbf{r}}_0 = (x_0'', y_0'', z_0'')$.

Выпущенные из точки $A = (x, y, z)$ векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, очевидно, принадлежат к соприкасающейся плоскости S. Если $t = s$ есть длина дуги Г, то $\dot{\mathbf{r}}(s)$ — единичный вектор, а вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к $\dot{\mathbf{r}}(s)$.

Из точки A нашей кривой Г (подчиняющейся указанным условиям) можно выпустить три единичных вектора, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, определяющих естественную прямоугольную систему координат в окрестности A

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \dot{\mathbf{r}}(s) && \text{— единичный вектор касательной;}\\
&\boldsymbol{\beta} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|} = R\ddot{\mathbf{r}}(s) = R\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} && \text{— единичный вектор главной нормали;}\\
&\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} && \text{— единичный вектор бинормали.}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Заметим, что направление $\boldsymbol{\alpha}$ зависит от параметра t в том смысле, что замена t на $-t$ изменяет направление $\boldsymbol{\alpha}$ на противоположное.

Что касается вектора $\boldsymbol{\beta}$, то мы его определили с помощью параметра s — длины дуги Г. Замена s на $-s$ или на $s+s_0$, где s_0 — постоянная, не влечет за собой изменение $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ (дифференцирование по s производится два раза), поэтому $\boldsymbol{\beta}$ есть *инвариант* — его направление вовсе не связано с параметрическим представлением кривой.

Нормалью к кривой Г в точке A естественно называть прямую, проходящую через эту точку перпендикулярно к касательной к Г в этой точке. Среди нормалей имеется одна, принадлежащая к соприкасающейся плоскости S (к кривой Г в точке A). Она называется *главной нормалью*. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, очевидно, принадлежит к S и перпендикулярен к касательной, поэтому он лежит на главной нормали. Удобно считать, что вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ или $\boldsymbol{\beta}$ определяет положительное направление главной нормали. Можно еще сказать, что $\boldsymbol{\beta}$ есть выходящий из точки A единичный вектор, принадлежащий к S и направленный в сторону вогнутости кривой Г (точнее, ее проекции на S).

Отложим от точки A в направлении $\boldsymbol{\beta}$ вектор длины R — радиуса кривизны Г в A. Конец его — точка O — называется *центром кривизны* Г в A. В случае плоской кривой Г это определение совпадает с приведенным в § 6.10 определением центра кривизны. Очевидно, что центр кривизны O определяется вектором [см. 6.9, (5)]

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r} + \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|^2}.$$

Наконец, вектор γ определен как единичный вектор, перпендикулярный к α и β и притом направленный так, чтобы система (α, β, γ) была ориентирована так же, как прямоугольная система координат (x, y, z), в которой рассматривается кривая.

Прямая, на которой лежит вектор γ (приложенный к точке A), называется *бинормалью* к Γ в A. Вектор γ определяет ее положительное направление.

Приложенные к движущейся по Γ точке A векторы α, β, γ определяют подвижный триэдр.

Отметим, что нормаль к плоской кривой, определенная в § 6.8, очевидно, совпадает (при $\ddot{\mathbf{r}}(s) \neq 0$) с главной нормалью. Положительные же направления на этой прямой (нормали или главной нормали) определены из разных принципов и могут не совпадать.

Исследование поведения вектора $\mathbf{r}(s)$ в окрестности точки s_0 часто удобно проводить, рассматривая $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)$ в прямоугольной системе координат α, β, γ. Будем считать, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (s — дуга Γ) и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ есть вектор точки $A_0 \in \Gamma$ и $\mathbf{ab}$ есть скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Тогда α, β, γ — функции от s. Из равенства $\gamma\alpha = 0$, $\gamma\gamma = 1$ следует, что проекции $\frac{d\gamma}{ds}$ на направления α и γ равны нулю:

$$\frac{d\gamma}{ds}\alpha = -\gamma\frac{d\alpha}{ds} = -|\ddot{\mathbf{r}}|\gamma\beta = 0, \quad \frac{d\gamma}{ds}\gamma = 0.$$

Но тогда

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{T}\beta, \tag{4}$$

где

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial\gamma}{ds}\beta. \tag{5}$$

Число $1/T$ называется *кручением* Γ в рассматриваемой точке $A \in \Gamma$. Его можно, очевидно, еще определить как число, абсолютная величина которого равна $\left|\frac{1}{T}\right| = \left|\frac{d\gamma}{ds}\right|$ (скорости изменения единичного вектора бинормали относительно s); *знак же $1/T$ положительный* или *отрицательный* в зависимости от того, будет ли проекция $\frac{d\gamma}{ds}$ на направление β положительна или отрицательна.

Отметим формулы Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{T}, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\gamma}{T}. \tag{6}$$

Первые две из них уже доказаны [см. (3), (4)], а третья доказывается следующим образом. Из тождества $\beta\alpha = \gamma\beta = 0$, $\beta\beta = 1$ дифференцированием их по s получаем

$$\frac{d\beta}{ds}\alpha = -\beta\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}\gamma = -\beta\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{1}{T}, \quad \frac{d\beta}{ds}\beta = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\beta}{ds} = \left(\frac{d\beta}{ds}\alpha\right)\alpha + \left(\frac{d\beta}{ds}\beta\right)\beta + \left(\frac{d\beta}{ds}\gamma\right)\gamma = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\gamma}{T}.$$

Из (6) следует, что если кривизна Г тождественно равна нулю ($1/R \equiv \equiv 0$), то $\frac{d\alpha}{ds} \equiv 0$, откуда следует, что $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_0) + (s - s_0)\dot{\mathbf{r}}(s_0)$, т. е. Г есть прямая. Если же кручение Г тождественно равно нулю ($1/T \equiv 0$), то $\frac{d\gamma}{ds} = 0$, $(\gamma\mathbf{r})' = \gamma\alpha + \dot{\gamma}\mathbf{r} = 0$ и $\gamma\mathbf{r} = \mathrm{const}$; это показывает, что Г — плоская кривая.

Пример 1. Винтовая линия Г

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \ z = h\theta \quad (a,\ h > 0)$$

имеет длину дуги s, производная которой по θ равна

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta} = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Поэтому единичный вектор α касательной к Г имеет проекции

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Далее,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{a\cos\theta}{a^2+h^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-a\sin\theta}{a^2+h^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$K = |\ddot{\mathbf{r}}| = \frac{a}{a^2+h^2}, \quad \beta = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k},$$

что показывает, что главная нормаль к Г параллельна плоскости x, y и идет по направлению к оси кругового цилиндра, на который навернута винтовая линия. Наконец,

$$\gamma = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{a^2+h^2}}\mathbf{i} - \frac{h\cos\theta}{\sqrt{a^2+h^2}}\mathbf{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\mathbf{k},$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{h\cos\theta}{a^2+h^2}\mathbf{i} + \frac{h\sin\theta}{a^2+h^2}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad \frac{1}{T} = \frac{d\gamma}{ds}\beta = -\frac{h}{a^2+h^2}.$$

В предположении, что $\mathbf{r}(s)$ имеет в окрестности $s = s_0$ непрерывные производные до третьего порядка включительно, имеет место формула Тейлора

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (s - s_0)\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{(s-s_0)^3}{3!}\dddot{\mathbf{r}}_0 + o\left((s-s_0)^3\right)$$
$$(s \to s_0), \tag{7}$$

где остаток есть вектор, длина которого стремится к нулю быстрее, чем $|s - s_0|^3$.

Так как единичные векторы

$$\alpha = \dot{\mathbf{r}}_0, \quad \beta = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_0}{|\ddot{\mathbf{r}}_0|}, \quad \gamma = \alpha\times\beta \quad (\ddot{\mathbf{r}} \neq 0)$$

ортогональны, то имеют место равенства

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \mu(s)\boldsymbol{\beta} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}, \tag{8}$$

$$\lambda(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mu(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}), \quad \nu(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\gamma}),$$

$$\lambda'(s_0) = \frac{d}{ds}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha})\big|_{s=s_0} = (\dot{\mathbf{r}}(s), \boldsymbol{\alpha})\big|_{s=s_0} = 1, \tag{9}$$

$$\mu'(s_0) = (\dot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad \mu''(s_0) = (\ddot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) \neq 0, \tag{10}$$

$$\nu'(s_0) = \nu''(s_0) = 0, \quad \nu'''(s_0) = (\dddot{\mathbf{r}}(s_0), \boldsymbol{\gamma}) \neq 0. \tag{11}$$

Последнее условие ($\nu'''(s_0) \neq 0$) мы предполагаем дополнительно. Оно обычно имеет место (случай $\nu'''(s_0) = 0$ исключительный).

Если смотреть на кривую Γ по направлению бинормали, то будем видеть ее проекцию Γ_γ на плоскость векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\gamma = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \mu(s)\boldsymbol{\beta}.$$

В силу свойств (9), (10) Γ_γ имеет в точке A_0 касательную $\mathbf{T}$ и в малой окрестности A_0 находится полностью над $\mathbf{T}$ или под $\mathbf{T}$ (рис. 6.12).

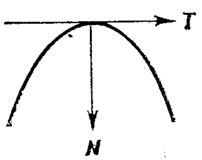

Рис. 6.12.

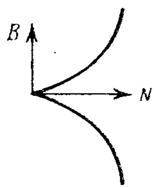

Рис. 6.13.

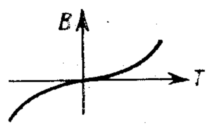

Рис. 6.14.

Если смотреть на Γ по направлению касательной, то будем видеть ее проекцию Γ_α на плоскость векторов $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\alpha = \mu(s)\boldsymbol{\beta} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}$. Таким образом, Γ_α определяется уравнениями

$$\eta = \mu(s), \quad \zeta = \nu(s), \tag{12}$$

где (η, ζ) — прямоугольные координаты в системе, определяемой ортами $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.

Имеем в силу (10)

$$\eta = \frac{(s - s_0)^2}{2}\mu''(s_0) + o\left((s - s_0)^3\right) \quad (s \to s_0),$$

и в силу (11)

$$\zeta = \frac{(s - s_0)^3}{3!}\nu'''(s_0) + o\left((s - s_0)^3\right) \quad (s \to s_0).$$

Таким образом, при малых $|s - s_0|$ знак $\eta = \mu(s)$ один и тот же, независимо от знака $s - s_0$,

$$\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_0 = \lim_{s \to s_0}\frac{\nu'(s)}{\mu'(s)} = \lim_{s \to s_0}\frac{\nu''(s)}{\mu''(s)} = \frac{\nu''(s_0)}{\mu''(s_0)} = 0,$$

а знак $\zeta = \nu(s)$ меняется вместе с переменой знака $s - s_0$, и кривая (12) имеет в начале координат (η, ζ) точку возврата (рис. 6.13; см. еще далее § 7.23).

Наконец, если смотреть на Г по главной нормали, то будем видеть ее проекцию Γ_β на плоскость векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)_\beta = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}.$$

В силу (9), (11) кривая $\xi = \lambda(s)$, $\zeta = \nu(s)$ обладает свойствами

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 = \frac{\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)} = 0, \quad \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_0 = \frac{\lambda'(s_0)\nu''(s_0) - \lambda''(s_0)\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)^3} = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_0 = \nu'''(s_0) \neq 0.$$

Это показывает, что кривая Γ_β имеет точку перегиба в A_0 (рис. 6.14).

§ 6.11. Асимптота

Пусть задана кривая (или ветвь кривой) Г, определяемая уравнением

$$y = f(x) \qquad (x > N), \tag{1}$$

где $f(x)$ — непрерывная для любого $x > N$ функция. Точку $A = (x, f(x))$ кривой Г можно считать зависящей от x.

Пусть, кроме того, задана прямая L

$$y = ax + b, \tag{2}$$

(a, b — постоянные числа). Если расстояние от точки A кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном возрастании x, то прямая L называется *асимптотой* кривой Г, соответствующей стремлению x к $+\infty$.

Итак, пусть L есть асимптота Г при $x \to +\infty$. Уравнение L в нормальном виде записывается так:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = 0.$$

Поэтому расстояние точки $A = (x, f(x))$ кривой Г до L равно $\rho(x) = |f(x) - ax - b|/\sqrt{1+a^2}$. Так как L, по условию, асимптота Г при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - ax - b| = 0. \tag{3}$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = 0$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a. \tag{4}$$

Из сказанного следует, как надо поступать, чтобы найти асимптоту Г при $x \to +\infty$. Надо взять предел (4). Если он не существует, то кривая Г не имеет асимптоты. Если же предел (4)