Наконец, если смотреть на Г по главной нормали, то будем видеть ее проекцию Γ_β на плоскость векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)_\beta = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}.$$

В силу (9), (11) кривая $\xi = \lambda(s)$, $\zeta = \nu(s)$ обладает свойствами

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 = \frac{\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)} = 0, \quad \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_0 = \frac{\lambda'(s_0)\nu''(s_0) - \lambda''(s_0)\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)^3} = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_0 = \nu'''(s_0) \neq 0.$$

Это показывает, что кривая Γ_β имеет точку перегиба в A_0 (рис. 6.14).

§ 6.11. Асимптота

Пусть задана кривая (или ветвь кривой) Г, определяемая уравнением

$$y = f(x) \qquad (x > N), \tag{1}$$

где $f(x)$ — непрерывная для любого $x > N$ функция. Точку $A = (x, f(x))$ кривой Г можно считать зависящей от x.

Пусть, кроме того, задана прямая L

$$y = ax + b, \tag{2}$$

(a, b — постоянные числа). Если расстояние от точки A кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном возрастании x, то прямая L называется *асимптотой* кривой Г, соответствующей стремлению x к $+\infty$.

Итак, пусть L есть асимптота Г при $x \to +\infty$. Уравнение L в нормальном виде записывается так:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = 0.$$

Поэтому расстояние точки $A = (x, f(x))$ кривой Г до L равно $\rho(x) = |f(x) - ax - b|/\sqrt{1+a^2}$. Так как L, по условию, асимптота Г при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - ax - b| = 0. \tag{3}$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = 0$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a. \tag{4}$$

Из сказанного следует, как надо поступать, чтобы найти асимптоту Г при $x \to +\infty$. Надо взять предел (4). Если он не существует, то кривая Г не имеет асимптоты. Если же предел (4) существует и равен a, надо вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \{f(x)-ax\}=b. \tag{5}$$

Если на самом деле предел (5) не существует, то кривая Г не имеет асимптоты при $x\to+\infty$. Если же он существует, то полученные константы a и b определяют прямую, которая и есть асимптота Г при $x\to+\infty$. Так как пределы (4) и (5) если существуют, то единственны, то непрерывная кривая Г (или ветвь кривой), определяемая равенством (1), либо не имеет вовсе либо имеет единственную асимптоту при $x\to+\infty$.

Аналогично определяется асимптота при $x\to-\infty$ непрерывной кривой (ветви кривой)

$$y=f(x) \qquad (x<-N), \tag{6}$$

а также асимптота при $x\to\infty$ кривой

$$y=f(x) \qquad (N\leqslant|x|) \tag{7}$$

(состоящей из двух ветвей, соответствующих $x>N$ и $x<-N$). В проведенных выше рассуждениях надо считать в случае (6), что $x\to-\infty$, а в случае (7), что $x\to\infty$.

Если кривая Г (или ветвь кривой) определяется уравнением $y=f(x)$ $(a<x<b)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на интервале $(a,\ b)$, обладающая свойством $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$, то в этом случае естественно называть прямую $x=a$ асимптотой Г. Во всяком случае, прямую $x=a$ принято называть *асимптотой* Г, если непрерывная функция $f(x)\to\infty$, $x\to a$ и строго монотонна в правой или левой окрестности точки $x=a$. Ведь тогда кривую Г можно записать в виде $x=\varphi(y)$, где y, положительное или отрицательное, достаточно велико по абсолютной величине и прямая $x=a$, очевидно, является асимптотой Г в указанном в начале параграфа смысле.

Пример 1. Отдадим себе отчет, какой вид имеет график Г функции $f(x)=\dfrac{1}{x}+x+e^{-x}$.

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+1+\dfrac{e^{-x}}{x}\right)=1$. Но уже предел этого отношения при $x\to-\infty$ равен $+\infty$.

Далее, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$. Таким образом, $y=x$ есть асимптота Г при $x\to+\infty$. Прямая $x=0$ тоже есть асимптота Г при стремлении x к 0 справа и слева:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ x>0}} f(x)=+\infty, \quad \lim_{\substack{x\to0\\ x<0}} f(x)=-\infty.$$

Найти корни уравнения $f'(x)=0$ не удается. Но очевидно, что

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}+e^{-x}>0 \quad (x>0),$$

$$\lim_{x\to 0+0} f'(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=1.$$

Таким образом, $f'(x)$ на $(0,\infty)$ строго возрастает и существует только одно значение $x_0>0$, где $f'(x_0)=0$. Функция $f(x)$, очевидно, убывает на $(0, x_0)$ от $+\infty$ до $f(x_0)$, затем возрастает, и при этом ее график имеет при $x\to+\infty$ асимптоту $y=x$ и весь находится над последней.

На интервале $(-\infty, 0)$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1-e^{-x}<0,$$

потому что $-1/x^2<0$ и $1-e^{-x}<0$. Учитывая это, легко видеть, что $f(x)$ на $(-\infty, 0)$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Далее,

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}+e^{-x},$$

$$f'''(x)=-\frac{6}{x^4}-e^{-x}<0 \text{ на } (-\infty, 0),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to 0, x<0} f''(x)=-\infty.$$

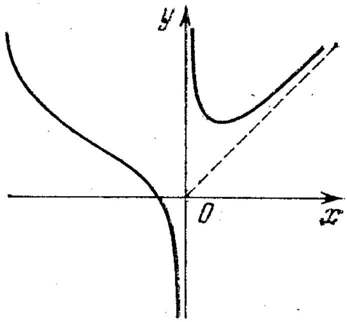

Рис. 6.15.

Поэтому на $(-\infty, 0)$ имеется, и притом единственная, точка x_1 перегиба графика $f(x)$. На $(-\infty, x_1)$ график f обращен выпуклостью книзу, а на $(x_1, 0)$ — выпуклостью кверху (см. схематический график, рис. 6.15).

Пример 2. Кривая $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ не имеет асимптоты, потому что хотя предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$$

и существует, все же предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-0,x)=\infty$$

не конечный.

§ 6.12. Замена переменных

Пусть y есть функция от x, а $x=\varphi(t)$ — заданная функция от t. Тогда y есть функция от t. Производные $\frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2}, \ldots$ от y по x выражаются через производные $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ и через известные производные $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi''(t)$ по следующим формулам