Найти корни уравнения $f'(x) = 0$ не удается. Но очевидно, что

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x} > 0 \quad (x > 0),$$

$$\lim_{x \to 0+0} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1.$$

Таким образом, $f'(x)$ на $(0, \infty)$ строго возрастает и существует только одно значение $x_0 > 0$, где $f'(x_0) = 0$. Функция $f(x)$, очевидно, убывает на $(0, x_0)$ от $+\infty$ до $f(x_0)$, затем возрастает, и при этом ее график имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = x$ и весь находится над последней.

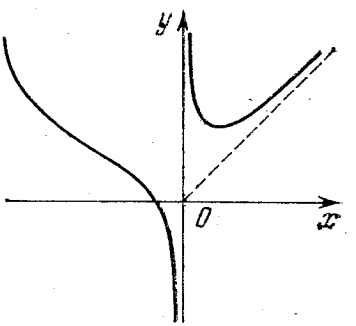

Рис. 6.15.

На интервале $(-\infty, 0)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 - e^{-x} < 0,$$

потому что $-1/x^2 < 0$ и $1 - e^{-x} < 0$. Учитывая это, легко видеть, что $f(x)$ на $(-\infty, 0)$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Далее,

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} - e^{-x} < 0 \text{ на } (-\infty, 0),$$

$$\lim_{x \to -\infty} f''(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0, x<0} f''(x) = -\infty.$$

Поэтому на $(-\infty, 0)$ имеется, и притом единственная, точка x_1 перегиба графика $f(x)$. На $(-\infty, x_1)$ график f обращен выпуклостью книзу, а на $(x_1, 0)$ — выпуклостью кверху (см. схематический график, рис. 6.15).

Пример 2. Кривая $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ не имеет асимптоты, потому что хотя предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

и существует, все же предел

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 0, x) = \infty$$

не конечный.

§ 6.12. Замена переменных

Пусть y есть функция от x, а $x = \varphi(t)$ — заданная функция от t. Тогда y есть функция от t. Производные $\frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2}, \ldots$ от y по x выражаются через производные $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ и через известные производные $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t)$ по следующим формулам

(§ 6.5, (5), (6)):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}. \tag{2}$$

Более сложным является случай, когда нужно выразить производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ через $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \ldots$, где $v = \lambda(y)$, $x = \mu(t)$ — данные функции. Здесь функция $\lambda(y)$ предполагается обратимой ($y = \lambda^{-1}(v)$).

Очевидно, что

$$\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \tag{4}$$

и мы выразили $\frac{dy}{dx}$ через $\frac{dv}{dt}$ и данные функции от v и от t.

Дифференцируя (3) по t, получим

$$\frac{d^2y}{dv^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dv}\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5}$$

Заменив в (5) $\frac{dy}{dx}$ выражением (4), и разрешив полученное уравнение относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим, что $\frac{d^2y}{dx^2}$ выражается через $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}$ и известные функции от v и от t.

Чтобы получить $\frac{d^3y}{dx^3}$, надо продифференцировать (5) по t, заменить $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ найденными выражениями и разрешить полученное уравнение относительно $\frac{d^3y}{dx^3}$. Подобным образом поступаем для получения соответствующих выражений для более высоких производных $\frac{d^ky}{dx^k}$.