примеры. Множество всех последовательностей действительных или комплексных чисел $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, если считать, что

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots\}, \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots\},$$

есть линейное множество. Его подмножество, состоящее из сходящихся к конечным числам последовательностей, с тем же определением сложения и умножения на число, очевидно, также есть линейное множество. Множество C всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f (действительных или комплексных), если считать, как обычно, что

$$\alpha f + \beta\varphi = \alpha f(x) + \beta\varphi(x) \quad (f, \varphi \in C),$$

есть тоже, очевидно, линейное множество.

Наконец, множество многочленов $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$ степени не выше n есть также линейное множество, если понимать их сложение и умножение на число в обычном смысле.

В списке аксиом 1) — 7) ничего не говорится явно о вычитании элементов и о нулевом элементе. На самом деле эти понятия возникают на основе этих аксиом. Положим $\theta_{\mathbf{x}} = 0 \cdot \mathbf{x}$; тогда $\mathbf{x} + \theta_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Аналогично определяем $\theta_{\mathbf{y}} = 0 \cdot \mathbf{y}$; для него также $\mathbf{y} + \theta_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$. Далее,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \theta_{\mathbf{y}} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \theta_{\mathbf{y}}) = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \theta_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + (\theta_{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \theta_{\mathbf{x}}) + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y}.$$

Но тогда (аксиома 3)) $\theta_{\mathbf{x}} = \theta_{\mathbf{y}} = \theta$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. Итак, θ есть нулевой элемент в E, так как для любого $\mathbf{x} \in E$ имеет место $\mathbf{x} + \theta = \mathbf{x}$. Положим теперь $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$; тогда $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (1 - 1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \theta$. Вычитание $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ двух элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ определяется при помощи равенства $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$. Это действие, обратное действию сложения:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) + \mathbf{y} = \mathbf{x} + [(-\mathbf{y}) + \mathbf{y}] = \mathbf{x} + \theta = \mathbf{x}.$$

§ 6.2. Евклидово n-мерное пространство. Пространство со скалярным произведением

Пусть R_n есть действительное или комплексное n-мерное пространство. Произвольным его точкам (векторам)

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

приведем в соответствие число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j, \tag{1}$$

называемое *скалярным произведением векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Здесь черта над y_j есть знак комплексного сопряжения. В случае действительного пространства y_j действительны и $\bar{y}_j = y_j$.

Скалярное произведение, очевидно, обладает следующими свойствами:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$;

2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть *линейная форма по* $\mathbf{x}$, т. е. для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и чисел α, β

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z});$$

таким образом, в силу 1)

$$(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \overline{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{z});$$

3) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ для любого вектора $\mathbf{x}$, а из равенства $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \theta$, так как тогда $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем следующее определение: если E есть линейное (действительное или комплексное) множество и любым его двум элементам (обобщенным векторам) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ приведено в соответствие число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, подчиняющееся условиям 1) — 3), то будем говорить, что E есть *линейное пространство со скалярным произведением* (где введено скалярное произведение).

Конечно, если E — *действительное* линейное множество, то в формулировках условий 1) — 3) можно черточки, обозначающие комплексное сопряжение, опустить.

Теперь мы можем сказать, что *n-мерное пространство R_n, в котором введено понятие* (1), *есть пространство со скалярным произведением.*

В математике известны и другие линейные пространства со скалярным произведением. Некоторые из них мы будем изучать (см. гл. 14).

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — два элемента какого-либо линейного множества E, где введено скалярное произведение, и λ — произвольное число (действительное или комплексное, в зависимости от того, будет ли E действительным или комплексным). Тогда в силу свойств 1) —3)

$$0 \leqslant (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} + |\lambda|^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \tag{2}$$

Если $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$, то положив в (2)

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \tag{3}$$

и, учтя что $a\overline{a} = |a|^2$, будем иметь

$$\overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = -\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} = -|\lambda|^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

т. е.

$$0 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \tag{4}$$

и мы получили важное неравенство (*неравенство Буняковского*):

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{5}$$

При $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, т. е. если $\mathbf{y} = \theta$ есть нулевой элемент, оно тоже верно, потому что $(\mathbf{x}, \theta) = (\mathbf{x}, 0 \cdot \theta) = 0(\mathbf{x}, \theta) = 0$.

Далее, для любых двух элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ имеет место:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \left(\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\right)^2, \tag{6}$$

и мы получили другое важное неравенство:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})^{1/2} \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{7}$$

Для пар элементов вида $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}$, где α — число и $\mathbf{y}$ любое или $\mathbf{y} = \theta$ и $\mathbf{x}$ любое, неравенство (5) обращается в точное равенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{8}$$

Наоборот, если выполняется равенство (8), то либо $\mathbf{y} = \theta$, либо выполняется (2) со знаком равенства, если λ определить по формуле (3), и тогда $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \theta$ в силу свойства 3) скалярного произведения.

Неравенство (7), очевидно, обращается в равенство при условии, что либо $\mathbf{y} = \theta$, либо $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, где α — неотрицательное число.

Но и наоборот, если (7) есть на самом деле равенство, то все соотношения в (6) обращаются в равенства, откуда, в частности, следует (8). Следовательно, либо $\mathbf{y} = \theta$, либо $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, где α — число. Положив в равенстве (7) $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$, получим после сокращения на $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ равенство $|1+\alpha| = 1 + |\alpha|$, откуда $\alpha \geqslant 0$.

Арифметическое значение корня квадратного из $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется *нормой* $\mathbf{x}$ и обозначается так: $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ (см. следующий параграф).

n-мерное пространство R_n, где введено скалярное произведение (1), а вместе с ним и норма $\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2}$ для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, называется *евклидовым n-мерным пространством*. Таким образом, нормы элементов $\mathbf{x}$ евклидова n-мерного пространства мы будем обозначать также через $|\mathbf{x}|$. При $n = 3$ норма $|\mathbf{x}| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$ вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ есть его длина.

Неравенства (5), (7) для элементов евклидова n-мерного пространства превращаются в следующие неравенства для систем чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$:

$$\left|\sum_1^n x_j\overline{y}_j\right| \leqslant \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n |y_j|^2\right)^{1/2}, \tag{9}$$

$$\left(\sum_1^n |x_j + y_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_1^n |y_j|^2\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Из (9) следует

$$\sum_1^n |x_j y_j| \leqslant \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n |y_j|\right)^{1/2}, \tag{11}$$

потому что можно считать, что неравенство (9) применено к неотрицательным числам $|x_j|$, $|y_j| = |\bar{y}_j|$.

Отметим еще неравенства

$$\frac{1}{n^{1/2}}\sum_1^n |x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_1^n |x_j|. \tag{12}$$

Первое из них вытекает из (11), если считать $y_j = 1$ ($j = 1, \ldots, n$), а второе проверяется непосредственно после возведения его частей в квадрат.

Соотношение (9) называется *неравенством Коши*, а (10) есть частный случай *неравенства Минковского* (см. далее § 14.2, (12)).

§ 6.3. Линейное нормированное пространство

Если E есть линейное множество элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ и каждому его элементу $\mathbf{x}$ приведено в соответствие число $\|\mathbf{x}\|$, удовлетворяющее ниже формулируемым трем свойствам 1) — 3), то говорят, что E есть *линейное нормированное пространство*, а число $\|\mathbf{x}\|$ называют *нормой элемента* $\mathbf{x}$.

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in E$; из равенства $\|\mathbf{x}\| = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \theta$, т. е. есть нулевой элемент линейного множества E;

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$ для любого $\mathbf{x} \in E$ и любого числа α (комплексного или действительного, в зависимости от того, будет ли E комплексным или действительным);

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Таким образом, евклидово пространство R_n есть нормированное пространство с нормой

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Возможны и другие (не евклидовы) нормировки пространства R_n. Например, для точек (векторов) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ можно ввести норму

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, \tag{2}$$

или

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_1^n |x_j|^p\right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty) \tag{3}$$

Тот факт, что (2) есть норма, так же как то, что (3) при $p = 1$ есть норма, читатель легко может проверить (общий случай см. § 14.2).

Неравенство 3) называется *неравенством треугольника*. В двумерном или трехмерном случае евклидова пространства оно как раз и выражает известный геометрический факт, что длина стороны треугольника не превышает суммы длин остальных его