потому что можно считать, что неравенство (9) применено к неотрицательным числам $|x_j|$, $|y_j| = |\bar{y}_j|$.

Отметим еще неравенства

$$\frac{1}{n^{1/2}}\sum_{1}^{n}|x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{1}^{n}|x_j|. \qquad (12)$$

Первое из них вытекает из (11), если считать $y_j = 1$ $(j = 1, \ldots$ $\ldots, n)$, а второе проверяется непосредственно после возведения его частей в квадрат.

Соотношение (9) называется *неравенством Коши*, а (10) есть частный случай *неравенства Минковского* (см. далее § 14.2, (12)).

§ 6.3. Линейное нормированное пространство

Если E есть линейное множество элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ и каждому его элементу $\mathbf{x}$ приведено в соответствие число $\|\mathbf{x}\|$, удовлетворяющее ниже формулируемым трем свойствам 1) — 3), то говорят, что E есть *линейное нормированное пространство*, а число $\|\mathbf{x}\|$ называют *нормой элемента* $\mathbf{x}$.

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in E$; из равенства $\|\mathbf{x}\| = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \theta$, т. е. есть нулевой элемент линейного множества E;

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$ для любого $\mathbf{x} \in E$ и любого числа α (комплексного или действительного, в зависимости от того, будет ли E комплексным или действительным);

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Таким образом, евклидово пространство R_n есть нормированное пространство с нормой

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \left(\sum_{1}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

Возможны и другие (не евклидовы) нормировки пространства R_n. Например, для точек (векторов) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ можно ввести норму

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, \qquad (2)$$

или

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty) \qquad (3)$$

Тот факт, что (2) есть норма, так же как то, что (3) при $p = 1$ есть норма, читатель легко может проверить (общий случай см. § 14.2).

Неравенство 3) называется *неравенством треугольника*. В двумерном или трехмерном случае евклидова пространства оно как раз и выражает известный геометрический факт, что длина стороны треугольника не превышает суммы длин остальных его двух сторон, и кстати доказывает этот факт аналитическим путем.

Из неравенства 3) следует (если заменить в нем $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ или $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}-\mathbf{x}$), что

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|, \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}\|,$$

поэтому

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \big|\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\big|. \tag{4}$$

В нормированном пространстве E можно определить *понятие предела*. Будем говорить, что последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ *сходится* (*стремится*) к элементу $\mathbf{x} \in E$ и писать $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ или $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ $(n \to \infty)$, если $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Если последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ *имеет предел* $\mathbf{x} \in E$, *то этот предел единственный*, потому что из того, что $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$, следует

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)+(\mathbf{x}_n-\mathbf{y})\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{x}_n-\mathbf{y}\| \to 0,$$

откуда $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0$, т. е. $\mathbf{x}=\mathbf{y}$.

Так как $\big|\|\mathbf{x}_n\|-\|\mathbf{x}\|\big| \leqslant \|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}\| \to 0$, то из того, что $\mathbf{x}_n$ сходится к $\mathbf{x}$, следует, что $\|\mathbf{x}_n\|$ стремится к $\|\mathbf{x}\|$:

$$\|\mathbf{x}_n\| \to \|\mathbf{x}\| \quad (n \to \infty).$$

Если $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$, а α_n, α — числа и если $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\alpha_n \to \alpha$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} \pm \mathbf{y}, \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n \mathbf{x}_n) = \alpha \mathbf{x}.$$

В самом деле,

$$\|(\mathbf{x}\pm\mathbf{y}) - (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n)\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_n\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\|\alpha\mathbf{x} - \alpha_n\mathbf{x}_n\| = \|(\alpha-\alpha_n)\mathbf{x} + \alpha_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\| \leqslant \|(\alpha-\alpha_n)\mathbf{x}\| + \\ + \|\alpha_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\| \leqslant |\alpha-\alpha_n|\,\|\mathbf{x}\| + |\alpha_n|\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

§ 6.4. Вектор-функция в n-мерном евклидовом пространстве

Пусть E есть множество действительных чисел t. Если каждому $t \in E$ в силу определенного закона приведен в соответствие вектор *)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)), \tag{1}$$

то будем говорить, что этим определена *вектор-функция* $\mathbf{x}(t)$ *на* E.

Обычные функции $\alpha(t)$ (приводящие в соответствие каждому $t \in E$ число $\alpha(t)$) называют также *скалярными функциями*.

*) Мы будем иметь в виду векторы $\mathbf{x}$, принадлежащие действительному пространству R_n, но ничего в наших рассуждениях не изменится, если считать R_n комплексным.