двух сторон, и кстати доказывает этот факт аналитическим путем.

Из неравенства 3) следует (если заменить в нем $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ или $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}-\mathbf{x}$), что

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|, \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|,$$

поэтому

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\||. \tag{4}$$

В нормированном пространстве E можно определить *понятие предела*. Будем говорить, что последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ *сходится* (*стремится*) к элементу $\mathbf{x} \in E$ и писать $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ или $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ $(n \to \infty)$, если $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Если последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ *имеет предел* $\mathbf{x} \in E$, *то этот предел единственный*, потому что из того, что $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$, следует

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) + (\mathbf{x}_n - \mathbf{y})\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| \to 0,$$

откуда $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Так как $|\|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}\|| \leqslant \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$, то из того, что $\mathbf{x}_n$ сходится к $\mathbf{x}$, следует, что $\|\mathbf{x}_n\|$ стремится к $\|\mathbf{x}\|$:

$$\|\mathbf{x}_n\| \to \|\mathbf{x}\| \quad (n \to \infty).$$

Если $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$, а α_n, α — числа и если $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\alpha_n \to \alpha$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} \pm \mathbf{y}, \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n \mathbf{x}_n) = \alpha \mathbf{x}.$$

В самом деле,

$$\|(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n)\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_n\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\|\alpha\mathbf{x} - \alpha_n\mathbf{x}_n\| = \|(\alpha-\alpha_n)\mathbf{x} + \alpha_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\| \leqslant \|(\alpha-\alpha_n)\mathbf{x}\| + \\ + \|\alpha_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\| \leqslant |\alpha-\alpha_n|\,\|\mathbf{x}\| + |\alpha_n|\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

§ 6.4. Вектор-функция в n-мерном евклидовом пространстве

Пусть E есть множество действительных чисел t. Если каждому $t \in E$ в силу определенного закона приведен в соответствие вектор *)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)), \tag{1}$$

то будем говорить, что этим определена *вектор-функция* $\mathbf{x}(t)$ *на* E.

Обычные функции $\alpha(t)$ (приводящие в соответствие каждому $t \in E$ число $\alpha(t)$) называют также *скалярными функциями*.

*) Мы будем иметь в виду векторы $\mathbf{x}$, принадлежащие действительному пространству R_n, но ничего в наших рассуждениях не изменится, если считать R_n комплексным.

Будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ имеет предел в точке t_0, равный вектору $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$, и писать

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)=\mathbf{y} \text{ или } \mathbf{x}(t)\to\mathbf{y},\ t\to t_0, \tag{2}$$

если

$$\lim_{t\to t_0}|\mathbf{y}-\mathbf{x}(t)|=0, \tag{3}$$

или, что все равно (пояснения ниже), если

$$\lim_{t\to t_0}x_j(t)=y_j \quad (j=1, \ldots, n). \tag{4}$$

Равенство (3) утверждает, что скалярная функция $|\mathbf{y}-\mathbf{x}(t)|$ от t имеет предел при $t\to t_0$, равный нулю, но это, как мы знаем, предполагает, что она определена на некоторой окрестности точки t_0, за исключением, быть может, самой точки t_0, но тогда и все компоненты $x_j(t)$ определены на этой окрестности.

Имеют место неравенства (см. 6.2, (11))

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|y_j-x_j(t)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}|y_j-x_j(t)|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_j(t))^2\right]^{1/2}=|\mathbf{y}-\mathbf{x}(t)|,$$

из которых следует, что если выполняется (3), то выполняется и (4) для всех $j=1, \ldots, n$, и наоборот.

По определению, вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ имеет правый (левый) предел в точке t_0, равный $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$, если

$$|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}|\to 0,\ t\to t_0,\ t>t_0$$

(соответственно $|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}|\to 0$, $t\to t_0$, $t<t_0$). Эти пределы обозначаются соответственно так:

$$\mathbf{x}(t_0+0)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(t_0-0)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}}\mathbf{x}(t).$$

Легко видеть, рассуждая как выше, что

$$\mathbf{x}(t_0+0)=(x_1(t_0+0), \ldots, x_n(t_0+0)),$$
$$\mathbf{x}(t_0-0)=(x_1(t_0-0), \ldots, x_n(t_0-0)),$$

причем существование векторных пределов, стоящих в левых частях этих равенств, влечет существование соответствующих пределов компонент, и наоборот.

По определению, вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ *непрерывна, непрерывна справа* или *непрерывна слева* в точке t_0, если существуют соответственно пределы $\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t_0+0)$ и $\mathbf{x}(t_0-0)$, равные $\mathbf{x}(t_0)$.

Эти определения, очевидно, эквивалентны утверждениям, что компоненты $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ в точке t_0 непрерывны, непрерывны справа, непрерывны слева.

Очевидно, что $\mathbf{x}(t)$ непрерывна в $t = t_0$ тогда и только тогда, когда существуют $x(t_0)$, $\mathbf{x}(t_0 + 0)$ и $\mathbf{x}(t_0 - 0)$ и выполняются равенства $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0 + 0) = \mathbf{x}(t_0 - 0)$.

Производная от вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ в точке t определяется как предел:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta\mathbf{x}}{h},$$

если, конечно, он существует. Производная порядка m от $\mathbf{x}(t)$ определяется по индукции:

$$\frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m} = \frac{d}{dt}\frac{d^{m-1}\mathbf{x}}{dt^{m-1}} \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

При этом, очевидно, существование ее влечет за собой существование производных m-го порядка от компонент и наоборот. Имеет место равенство

$$\frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m} = \left(x_1^{(m)}(t), \ldots, x_n^{(m)}(t)\right) \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Производные первого и второго порядка обозначают и так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Если $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — вектор-функция, а $\alpha(t)$ — скалярная функция, то имеют место равенства:

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{x}(t) \pm \mathbf{y}(t)] = \lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t) \pm \lim_{t\to t_0} \mathbf{y}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0} [\alpha(t)\,\mathbf{x}(t)] = \lim_{t\to t_0} \alpha(t) \lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t),$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{x},$$

где, конечно, предполагается, что пределы или производные, фигурирующие в правых частях равенств, существуют. Эти равенства тривиальным образом доказываются переходом от векторов к соответствующим координатам, например,

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{x}(t) \pm \mathbf{y}(t)] = \left(\lim_{t\to t_0} [x_1(t) \pm y_1(t)], \ldots, \lim_{t\to t_0} [x_n(t) \pm y_n(t)]\right) =$$

$$= \left(\lim_{t\to t_0} x_1(t) \pm \lim_{t\to t_0} y_1(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} x_n(t) + \lim_{t\to t_0} y_n(t)\right) =$$

$$= \left(\lim_{t\to t_0} x_1(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} x_n(t)\right) \pm \left(\lim_{t\to t_0} y_1(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} y_n(t)\right) =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t) \pm \lim_{t\to t_0} \mathbf{y}(t).$$

Но можно рассуждения проводить чисто векторным путем, например, полагая $\lim_{t\to t_0}\alpha(t)=\beta$, $\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)=\mathbf{y}$, получим

$$|\alpha(t)\mathbf{x}(t)-\beta\mathbf{y}|\leqslant|[\alpha(t)-\beta]\mathbf{x}(t)|+|\beta(\mathbf{x}(t)-\mathbf{y})|\leqslant$$
$$\leqslant|\alpha(t)-\beta|\,|\mathbf{x}(t)|+|\beta|\,|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}|\to 0\cdot|\mathbf{y}|+|\beta|\cdot 0=0,\ t\to t_0.$$

§ 6.5. Кривая в n-мерном пространстве

При непрерывном возрастании t на $[a, b]$ ((a, b)) точка, определяемая непрерывной вектор-функцией

$$\mathbf{x}(t)=(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t))\in R_n, \tag{1}$$

описывает некоторый образ — *траекторию* (*годограф*) *вектор-функции* $\mathbf{x}(t)$ *или множество точек, упорядоченное посредством переменной* t. При этом не исключено, что подвижная точка $\mathbf{x}(t)$ может возвратиться в точку пространства R_n, которую она уже прошла, но уже при новом значении t. При $n=2$, 3 подобные траектории имеют реальный смысл.

Наряду с непрерывной вектор-функнией (1) будем рассматривать вектор-функции, определяемые векторными равенствами

$$\mathbf{x}_*(\tau)=\mathbf{x}(\lambda(\tau))=(\varphi_1(\lambda(\tau)),\ \ldots,\ \varphi_n(\lambda(\tau)))$$
$$(\tau\in[c, d]\ \text{или}\ \tau\in(c, d)) \tag{2}$$

или, что все равно, системами скалярных равенств

$$x_1=\varphi_{*1}(\tau)=\varphi_1(\lambda(\tau)),\ \ldots,\ x_n=\varphi_{*n}(\tau)=\varphi_n(\lambda(\tau)), \tag{2'}$$

где $t=\lambda(\tau)$ есть произвольная непрерывная строго монотонная (действительная!) функция, отображающая (взаимно однозначно!) некоторый отрезок $[c, d]$ (интервал (c, d)) новой переменной τ на отрезок $[a, b]$ (интервал (a, b)) прежней переменной t.

Ясно, что уравнение (2) определяет ту же траекторию, что и уравнение (1), и упорядочение ее точек с помощью t и τ происходит одинаково, если $\lambda(\tau)$ строго возрастает, и оно меняется на противоположное упорядочение, если $\lambda(\tau)$ строго убывает.

Говорят, что уравнение (1) определяет *непрерывную кривую* Γ, заданную параметрически через параметр t, в то время как уравнение (2) определяет ту же кривую Γ, но через параметр τ. Таким образом, различным указанным строго монотонным непрерывным функциям $\lambda(\tau)$ соответствуют различные *параметрические представления* одной и той же *непрерывной кривой* Γ.

Всегда можно функцию $\lambda(\tau)$ подобрать так, что будет $c=0$, $d=1$.

Функции $\lambda(\tau)$ можно разбить на два класса: класс строго возрастающих функций и класс строго убывающих функций. Первый класс упорядочивает точки Γ в одном направлении, а вто-