Но можно рассуждения проводить чисто векторным путем, например, полагая $\lim_{t\to t_0}\alpha(t)=\beta$, $\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)=\mathbf{y}$, получим

$$|\alpha(t)\mathbf{x}(t)-\beta\mathbf{y}|\leqslant|[\alpha(t)-\beta]\mathbf{x}(t)|+|\beta(\mathbf{x}(t)-\mathbf{y})|\leqslant$$
$$\leqslant|\alpha(t)-\beta|\,|\mathbf{x}(t)|+|\beta|\,|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}|\to 0\cdot|\mathbf{y}|+|\beta|\cdot 0=0,\ t\to t_0.$$

§ 6.5. Кривая в n-мерном пространстве

При непрерывном возрастании t на $[a, b]$ $((a, b))$ точка, определяемая непрерывной вектор-функцией

$$\mathbf{x}(t)=(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t))\in R_n, \tag{1}$$

описывает некоторый образ — *траекторию* (*годограф*) *вектор-функции* $\mathbf{x}(t)$ *или множество точек, упорядоченное посредством переменной* t. При этом не исключено, что подвижная точка $\mathbf{x}(t)$ может возвратиться в точку пространства R_n, которую она уже прошла, но уже при новом значении t. При $n=2$, 3 подобные траектории имеют реальный смысл.

Наряду с непрерывной вектор-функнией (1) будем рассматривать вектор-функции, определяемые векторными равенствами

$$\mathbf{x}_*(\tau)=\mathbf{x}(\lambda(\tau))=(\varphi_1(\lambda(\tau)),\ \ldots,\ \varphi_n(\lambda(\tau)))$$
$$(\tau\in[c, d]\ \text{или}\ \tau\in(c, d)) \tag{2}$$

или, что все равно, системами скалярных равенств

$$x_1=\varphi_{*1}(\tau)=\varphi_1(\lambda(\tau)),\ \ldots,\ x_n=\varphi_{*n}(\tau)=\varphi_n(\lambda(\tau)), \tag{2'}$$

где $t=\lambda(\tau)$ есть произвольная непрерывная строго монотонная (действительная!) функция, отображающая (взаимно однозначно!) некоторый отрезок $[c, d]$ (интервал (c, d)) новой переменной τ на отрезок $[a, b]$ (интервал (a, b)) прежней переменной t.

Ясно, что уравнение (2) определяет ту же траекторию, что и уравнение (1), и упорядочение ее точек с помощью t и τ происходит одинаково, если $\lambda(\tau)$ строго возрастает, и оно меняется на противоположное упорядочение, если $\lambda(\tau)$ строго убывает.

Говорят, что уравнение (1) определяет *непрерывную кривую* Γ, заданную параметрически через параметр t, в то время как уравнение (2) определяет ту же кривую Γ, но через параметр τ. Таким образом, различным указанным строго монотонным непрерывным функциям $\lambda(\tau)$ соответствуют различные *параметрические представления* одной и той же *непрерывной кривой* Γ.

Всегда можно функцию $\lambda(\tau)$ подобрать так, что будет $c=0$, $d=1$.

Функции $\lambda(\tau)$ можно разбить на два класса: класс строго возрастающих функций и класс строго убывающих функций. Первый класс упорядочивает точки Γ в одном направлении, а второй — в другом, ему противоположном. В связи с этим возникает понятие *ориентированной кривой* Γ. Мы можем обозначить, например, через Γ_+ кривую Γ, ориентированную при помощи параметра t. Γ_+ определяют также всевозможные уравнения (2), где $\lambda(\tau)$ — непрерывные строго возрастающие функции. Эту же *кривую* Γ, *ориентированную противоположно*, естественно обозначать через Γ_-. Она определяется всевозможными уравнениями (2), где $\lambda(\tau)$ — непрерывные строго убывающие функции.

Кривая Γ называется *гладкой на* $[a, b]$ [на (a, b)), если ее можно *) задать при помощи *гладкой вектор-функции* $\mathbf{x}(t)$, т. е. непрерывной и имеющей непрерывную *не равную нулю* производную на $[a, b]$ (на (a, b)) или, что, очевидно, все равно, если компоненты $x_j(t)$ вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ есть гладкие скалярные функции на $[a, b]$ (на (a, b)), имеющие производные, одновременно не равные нулю. Это последнее свойство эквивалентно тому факту, что

$$|\mathbf{x}'(t)|^2 = \sum_{j=1}^{n} [x_j'(t)]^2 > 0, \quad t \in [a, b] \ ((a, b)). \tag{3}$$

В этой формулировке, конечно, непрерывность $\mathbf{x}(t)$ в концевых точках a и b понимается как односторонняя непрерывность справа в a и слева в b. Производная же $\mathbf{x}'(t)$ в a и b понимается как правая в a и левая в b.

Мы будем называть параметр τ *допустимым* параметром гладкой кривой Γ, если он связан с t при помощи равенства $t = \lambda(\tau)$, $\tau \in [c, d]$ ((c, d)), где $\lambda(\tau)$ не только непрерывна и строго монотонна, но имеет непрерывную производную, не равную нулю на $[c, d]$ ((c, d)). Таким образом, производная $\lambda'(\tau)$ на самом деле имеет один и тот же знак на $[c, d]$ ((c, d)): «+» или «−». Если τ — допустимый параметр, то сформулированное выше на языке t определяющее свойство гладкой кривой, очевидно, сохранится, если его формулировать на языке τ, потому что вектор-функция $\mathbf{x}(\lambda(\tau)) = x_*(\tau)$, имеет непрерывную производную на $[c, d]$ ((c, d)), к тому же не равную нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{*j}'(\tau)^2 = \lambda'(\tau)^2 \sum_{j=1}^{n} x_j'(t)^2 > 0.$$

Зададим точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \mathbf{x}^0 \in \Gamma$, соответствующую значению $t_0 \in (a, b)$. Одно из слагаемых суммы в (3) положительное, для определенности будем считать n-е: $x_n'(t_0)^2 > 0$.

---

*) Здесь слово «можно» существенно, так как гладкую вектор-функцию можно «испортить», введя новый параметр τ при помощи подстановки $t = \lambda(\tau)$, где $\lambda(\tau)$ — строго монотонная непрерывная функция, имеющая производную, равную нулю, или вовсе не имеющая производной в некоторых τ.

Тогда существует окрестность*) значения t_0 на которой $x_n'(t)$ сохраняет знак, и на этой окрестности уравнение $x_n = x_n(t)$ можно разрешить:

$$t = \mu(x_n), \quad \left(x_n^0 - \eta_1 < x_n < x_n^0 + \eta_2\right),$$

где $\eta_1, \eta_2 > 0$ — некоторые числа, а μ — функция, обратная к $x_n(t)$, непрерывная и имеющая непрерывную производную. Но тогда кусок нашей кривой (1), соответствующий указанной окрестности, наряду с уравнениями (1) определяется также уравнениями

$$\begin{gathered} x_j = \mu_j(x_n) = x_j[\mu(x_n)] \quad (j = 1, \ldots, n-1), \\ x_n = x_n \quad \left(x_n^0 - \eta_1 < x_n < x_n^0 + \eta_2\right). \end{gathered}$$

Эти уравнения можно дифференцировать один раз (в указанной окрестности):

$$\frac{dx_j}{dx_n} = \frac{\dfrac{dx_j}{dt}}{\dfrac{dx_n}{dt}} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Сказанное мы резюмируем:

Теорема 1. *Какова бы ни была точка* $\mathbf{x}^0$ *гладкой кривой* Γ, *соответствующая некоторому значению* $t = t_0 \in (a, b)$ *параметра, можно указать такое достаточно малое* $\delta > 0$, *что кусок* Γ, *соответствующий изменению* t *на интервале* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, *можно параметрически выразить по крайней мере через одну из координат* x_i:

$$x_j = \varphi_j(x_i) \quad \left(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\ x_i^0 - \eta_1 < x_i < x_i^0 + \eta_2\right),$$

где функции φ_j *имеют непрерывные производные*:

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{dx_j}{dt}}{\dfrac{dx_i}{dt}} \quad (j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

В частности, в двумерном случае гладкая кривая определяется двумя уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t \in (a, b)), \tag{4}$$

где φ и ψ имеют непрерывные, одновременно не равные нулю производные. Если, например, $\varphi'(t_0) \neq 0$, то существует интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, на котором φ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда $y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Обычно в этом случае говорят, что

*) Если $t_0 = a, b$, то вместо окрестности надо иметь в виду полуокрестность (правую или левую) точки t_0.

функция $y=f(x)$ задана параметрически равенствами (4), формулу же

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{5}$$

трактуют как *формулу производной от функции* $f(x)$ *в параметрическом виде*. Очевидно также, что

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{x_t'y_t''-y_t'x_t''}{x_t'^3}, \tag{6}$$

если добавочно допустить, что существуют вторые производные x_t'', y_t''.

Кривая Γ называется *непрерывной кусочно гладкой* на $[a, b]$ (на (a, b)), если ее можно задать при помощи непрерывной на $[a, b]$ ((a, b)) вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ такой, что отрезок $[a, b]$ (интервал (a, b)) может быть разбит на конечное число частей точками $a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b$ так, что $\mathbf{x}(t)$ на этих частях *) $[a, t_1]$ $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{N-1}, b]$ есть гладкая кривая.

Надо иметь в виду, что в точках деления t_k $(k=1, \ldots, N-1)$ левая производная $\dot{\mathbf{x}}(t_k-0)$, вообще говоря, не равна правой $\dot{\mathbf{x}}(t_k+0)$, но обе они отличны от нуля (среди их компонент имеется хотя бы одна не равная нулю).

Различные параметрические представления непрерывной кусочно-гладкой кривой Γ определяются уравнением (2) при помощи функции $t=\lambda(\tau)$, имеющей на $[c, d]$ ((c, d)) не равную нулю непрерывную производную $\lambda'(\tau)$.

Непрерывная кривая (1) называется также *кривой Жордана* (*жордановой кривой*) по имени французского математика Жордана (1838—1922). Если при этом $\mathbf{x}(a)=\mathbf{x}(b)$, то кривую называют *замкнутой* (*замкнутой кривой Жордана*). Если, кроме того, из того факта, что $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}(t_2)$ следует только, что либо $t_1=t_2$, либо одно из чисел t_1, t_2 равно a, а другое b, то кривая Γ называется *замкнутой самонепересекающейся кривой Жордана* или *непрерывной замкнутой самонепересекающейся кривой*.

Если из равенства $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}(t_2)$ $(t_1, t_2\in[a, b]$ или $t_1, t_2\in(a, b))$ следует $t_1=t_2$, то говорят, что Γ есть *незамкнутая самонепересекающаяся кривая*.

При $n=2$ мы получим плоскую непрерывную кривую

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ t\in[a, b] \text{ или } t\in(a, b). \tag{7}$$

*) В случае интервала $[a, t_1]$, $[t_{N-1}, b]$ заменяются соответственно на $(a, t_1]$, $[t_{N-1}, b)$.

Например, уравнения

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta\ (-\infty < \theta < \infty) \tag{8}$$

определяют гладкую плоскую кривую. Когда θ непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, соответствующая точка (x, y) описывает бесконечное число раз окружность

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{9}$$

В связи с этими говорят, что уравнения (8) суть параметрические уравнения окружности (9). В данном случае параметр θ имеет геометрический смысл — это есть угол, образованный радиус-вектором точки (x, y) с положительным направлением оси x.

Уравнения окружности (8) можно записать более экономно:

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{10}$$

где θ пробегает только отрезок $[0, 2\pi]$. Кривая (10) есть гладкая самонепересекающаяся замкнутая кривая. Про окружность Γ, рассматриваемую как геометрическое место точек (x, y), удовлетворяющих уравнению (9), тоже обычно говорят, что она замкнутая кривая. Это можно понимать в следующем смысле: существует непрерывная самонепересекающаяся заданная параметрически замкнутая кривая, кривая (10), пробегающая точки Γ и только точки Γ.

Жордан доказал следующее геометрически очевидное утверждение, требующее, однако, для его обоснования нетривиальных рассуждений: *самонепересекающаяся непрерывная замкнутая кривая* Γ, *лежащая на плоскости* R, *делит множество* $R - \Gamma$ *на две непересекающиеся непустые области, внутреннюю по отношению к* Γ *и внешнюю*: $R - \Gamma = A_i + A_e$. Любые две точки в A_i можно соединить непрерывной кривой, полностью принадлежащей к A_i, а любые две точки A_e можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей к A_e. Любая кривая, соединяющая произвольную точку A_i с произвольной точкой A_e, имеет по крайней мере одну общую точку с Γ (пересекается с Γ). Область A_i ограничена, в то время как A_e не ограничена.

Нужно сказать, что определение непрерывной кривой является настолько общим, что имеются примеры удовлетворяющих этому определению математических объектов, которые весьма сильно отклоняются от нашего обычного представления о кривой, в особенности, если разрешить ей самопересекаться.

Доказано, например, что можно определить такие непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

что при непрерывном возрастании t от $t = 0$ до $t = 1$ переменная точка $(\varphi(t), \psi(t))$, отправляясь при $t = 0$ от положения $(0, 0)$, пробежит буквально все точки квадрата $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ и при $t = 1$

окажется в верхнем правом его углу (1, 1). Таким образом, эта кривая (кривая Пеано) заметает буквально все точки квадрата $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$, и при этом отдельные его точки заметаются кривой не один раз.

На рис. 6.1. изображена плоская кривая Г, которую будем считать заданной непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \varphi'^2 + \psi'^2 > 0, \quad 0 < t < 1.$$

Когда t непрерывно возрастает на интервале $(0, 1)$, точка (x, y) движется по кривой Г от точки A через B, C и снова при $t \to 1$ стремится к B. Мы видим, что, немотря на непрерывную дифференцируемость функций φ и ψ, кривая Г имеет особенность в точке B, выражающуюся в том, что как бы ни был мал прямоугольник с центром в B, принадлежащая ему часть Г не проектируется взаимно однозначно ни на одну из осей координат. Если гладкая кривая Г в любой ее точке не обладает этим недостатком, т. е. если любую точку можно покрыть прямоугольником Δ с ребрами, параллельными осям координат, так, что $\Gamma\Delta$ проектируемая взаимно однозначно на одну из координатных осей, то Г называют *одномерным дифференцируемым многообразием.*

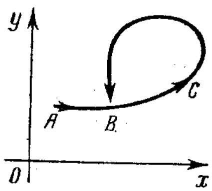

Рис. 6.1.

В § 17.1 доказана лемма 1, из которой как частный случай вытекает следующее утверждение.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ гладкая кривая $\overline{\Gamma}$

$$x_i = \varphi_i(t), \ \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i')^2 > 0, \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

самонепересекается, т. е. если $\overline{\Gamma}$ и $[a, b]$ при помощи уравнений (1) *находятся во взаимно однозначном соответствии, то полученная из нее выкидыванием обоих ее концов кривая* Г *(заданная на интервале* (a, b)*)* есть *одномерное дифференцируемое многообразие.*

Пример 1. Эллипс Г

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

есть ограниченная гладкая замкнутая самонепересекающаяся кривая, потому что Г также описывается параметрически уравнениями

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{12}$$

определяющими ограниченную гладкую замкнутую кривую в том понимании терминов гладкость, замкнутость, как это определено выше в этом параграфе.

Пример 2. Астроида Г

$$|ax|^{2/3} + |by|^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \quad (0 < b < a) \tag{13}$$

есть ограниченная непрерывная кусочно гладкая замкнутая кривая, потому что уравнение (13) эквивалентно следующим двум:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\theta, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{14}$$

причем имеется только одна пара значений θ $(\theta = 0,\ \theta = 2\pi)$, которым соответствует одна и та же точка Г. Из (13) видно, что кривая Г симметрична относительно осей координат, а из (14) видно, что она непрерывна; производные от x и y по θ тоже непрерывны и одновременно не равны нулю всюду, за исключением точек 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. Поэтому куски Г, соответствующие интервалам $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$, гладкие (см. § 6.9, рис. 6.11).

§ 6.6. Геометрический смысл производной вектор-функции

Пусть в пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана гладкая вектор-функция (см. стр. 186)

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \qquad t \in (a, b). \tag{1}$$

На рис. 6.2 изображен годограф вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и отмечены две точки A и B годографа — концы векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ с началом в нулевой точке.

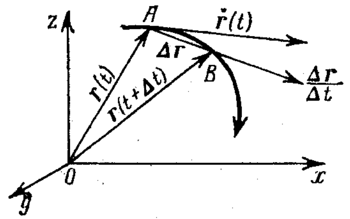

Рис. 6.2.

Очевидно, что вектор $\overline{AB} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. При $\Delta t \to 0$ точка B, двигаясь по годографу, стремится к точке A, а секущая, проходящая через A и B, стремится занять положение определенной прямой, которую называют *касательной к годографу в точке* A. Поэтому предельный вектор

$$\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t},$$

(он не равен нулю!) лежит на касательной к годографу в точке A. Длина $|\dot{\mathbf{r}}|$ вектора $\dot{\mathbf{r}}$ есть предел длины вектора $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, потому что

$$\left| |\dot{\mathbf{r}}| - \left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| \right| \leqslant \left| \dot{\mathbf{r}} - \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| \to 0 \quad (\Delta t \to 0).$$

Если t есть время и конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает движение некоторой точки, то $\dot{\mathbf{r}}(t)$ есть вектор, выражающий скорость этой точки в момент времени t. Длина его $|\dot{\mathbf{r}}|$ есть скалярная величина скорости. Кроме того, вектор $\dot{\mathbf{r}}$ определяет направление движения точки в момент t. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ есть ускорение точки в момент t.

В § 6.4 мы уже останавливались на некоторых свойствах производной от вектор-функции. Отметим еще следующие очевидные свойства ($[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right), \qquad \frac{d}{dt}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \left[\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b}\right],$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ — скалярное произведение, а $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] =$