на относительно осей координат, а из (14) видно, что она непрерывна; производные от x и y по θ тоже непрерывны и одновременно не равны нулю всюду, за исключением точек 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. Поэтому куски Г, соответствующие интервалам $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$, гладкие (см. § 6.9, рис. 6.11).

§ 6.6. Геометрический смысл производной вектор-функции

Пусть в пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана гладкая вектор-функция (см. стр. 186)

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \qquad t \in (a, b). \tag{1}$$

На рис. 6.2 изображен годограф вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и отмечены две точки A и B годографа — концы векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ с началом в нулевой точке.

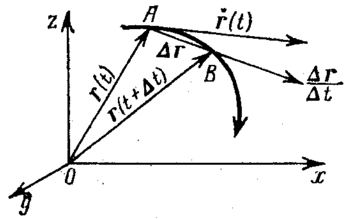

Рис. 6.2.

Очевидно, что вектор $\overline{AB} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$. При $\Delta t \to 0$ точка B, двигаясь по годографу, стремится к точке A, а секущая, проходящая через A и B, стремится занять положение определенной прямой, которую называют *касательной к годографу в точке* A. Поэтому предельный вектор

$$\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t},$$

(он не равен нулю!) лежит на касательной к годографу в точке A. Длина $|\dot{\mathbf{r}}|$ вектора $\dot{\mathbf{r}}$ есть предел длины вектора $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, потому что

$$\left| |\dot{\mathbf{r}}| - \left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| \right| \leqslant \left| \dot{\mathbf{r}} - \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| \to 0 \quad (\Delta t \to 0).$$

Если t есть время и конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает движение некоторой точки, то $\dot{\mathbf{r}}(t)$ есть вектор, выражающий скорость этой точки в момент времени t. Длина его $|\dot{\mathbf{r}}|$ есть скалярная величина скорости. Кроме того, вектор $\dot{\mathbf{r}}$ определяет направление движения точки в момент t. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ есть ускорение точки в момент t.

В § 6.4 мы уже останавливались на некоторых свойствах производной от вектор-функции. Отметим еще следующие очевидные свойства ($[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right), \qquad \frac{d}{dt}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \left[\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b}\right],$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ — скалярное произведение, а $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] =$

$= (a_y b_z - a_z b_y,\quad a_z b_x - a_x b_z,\quad a_x b_y - a_y b_x)$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отметим еще следующий факт. Пусть гладкая вектор-функция $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ имеет постоянную норму (длину): $|\mathbf{b}(t)| = c = \text{const} > 0$. Тогда $(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = b^2 = c^2$ и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 2\left(\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) = 0.$$

Таким образом, для любого t векторы $\mathbf{b}$ и $\frac{d\mathbf{b}}{dt}$ ортогональны (по условию $\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \neq 0\Big)$.

Произвольный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, имеющий при любом рассматриваемом t положительную длину ($|\mathbf{a}| > 0$), можно записать в виде $\mathbf{a} = \alpha\boldsymbol{\omega}$, где

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(\frac{a_1(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3(t)}{|\mathbf{a}|}\right), \alpha(t) = |\mathbf{a}| = \\ = \sqrt{a_1(t)^2 + a_2(t)^2 + a_3(t)^2}.$$

Очевидно, что если вектор $\mathbf{a}$ имеет производную для рассматриваемых t, то функции $\boldsymbol{\omega}$ и α имеют производные для этих t. Производная от вектора $\mathbf{a}$ раскладывается на два вектора:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{\omega} + \alpha\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{1}$$

Из них первый направлен в ту же сторону, что и $\mathbf{a}$ (или $\boldsymbol{\omega}$), и длина его равна скорости изменения длины $\mathbf{a}$, а второй ортогонален к $\boldsymbol{\omega}$. Эта формула применяется в механике для разложения вектора ускорения на две составляющие, из которых одна имеет направление движения, а другая направлена перпендикулярно к ней.

§ 6.7. Длина дуги кривой

Пусть Γ есть непрерывная кривая

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \qquad (t \in [a, b]). \tag{1}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b. \tag{2}$$

Им соответствуют точки кривой Γ $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Если соединить их последовательно отрезками (рис. 6.3), то получим ломаную, вписанную в Γ.

Длиной кривой Γ называется предел, к которому стремится сумма длин звеньев этой ломаной,

$$|\overset{\smile}{AB}| = \lim \sum_1^n |A_{k-1}A_k|, \quad \max(t_k - t_{k-1}) \to 0, \tag{3}$$