$= (a_y b_z - a_z b_y,\ \ a_z b_x - a_x b_z,\ \ a_x b_y - a_y b_x)$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отметим еще следующий факт. Пусть гладкая вектор-функция $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ имеет постоянную норму (длину): $|\mathbf{b}(t)| = c = \text{const} > 0$. Тогда $(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = b^2 = c^2$ и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 2\left(\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) = 0.$$

Таким образом, для любого $t$ векторы $\mathbf{b}$ и $\dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$ ортогональны (по условию $\mathbf{b}, \dfrac{d\mathbf{b}}{dt} \neq 0\Big)$.

Произвольный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, имеющий при любом рассматриваемом $t$ положительную длину ($|\mathbf{a}| > 0$), можно записать в виде $\mathbf{a} = \alpha\boldsymbol{\omega}$, где

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(\frac{a_1(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3(t)}{|\mathbf{a}|}\right), \alpha(t) = |\mathbf{a}| = \\ = \sqrt{a_1(t)^2 + a_2(t)^2 + a_3(t)^2}.$$

Очевидно, что если вектор $\mathbf{a}$ имеет производную для рассматриваемых $t$, то функции $\boldsymbol{\omega}$ и $\alpha$ имеют производные для этих $t$. Производная от вектора $\mathbf{a}$ раскладывается на два вектора:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{\omega} + \alpha\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{1}$$

Из них первый направлен в ту же сторону, что и $\mathbf{a}$ (или $\boldsymbol{\omega}$), и длина его равна скорости изменения длины $\mathbf{a}$, а второй ортогонален к $\boldsymbol{\omega}$. Эта формула применяется в механике для разложения вектора ускорения на две составляющие, из которых одна имеет направление движения, а другая направлена перпендикулярно к ней.

## § 6.7. Длина дуги кривой

Пусть $\Gamma$ есть непрерывная кривая

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \qquad (t \in [a, b]). \tag{1}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b. \tag{2}$$

Им соответствуют точки кривой $\Gamma$ $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Если соединить их последовательно отрезками (рис. 6.3), то получим ломаную, вписанную в $\Gamma$.

*Длиной* кривой $\Gamma$ называется предел, к которому стремится сумма длин звеньев этой ломаной,

$$|\breve{AB}| = \lim \sum_1^n |A_{k-1}A_k|, \quad \max(t_k - t_{k-1}) \to 0, \tag{3}$$

когда максимальный частичный отрезок разбиения (2) стремится к нулю. Если предел (3) существует, то говорят, что *кривая спрямляема на отрезке* $[a, b]$ *изменения параметра* $t$.

Будем считать теперь, что наша кривая Г гладкая. Таким образом, функции $\varphi$, $\psi$, $\chi$ предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные на $[a, b]$, подчиняющиеся неравенству

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 = \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2 > 0 \qquad (t \in [a, b]). \tag{4}$$

В разделе «Интегральное исчисление» будет доказано, что гладкая кривая спрямляема на любом отрезке изменения параметра $t$ и что длина дуги гладкой кривой Г обладает свойством аддитивности. Это значит, что если $P_1$, $P_2$, $P_3$ — три точки Г, соответствующие значениям $t_1$, $t_2$, $t_3$ параметра, и $t_1 < t_2 < t_3$, то имеет место равенство

$$|\smile{P_1P_3}| = |\smile{P_1P_2}| + |\smile{P_2P_3}|.$$

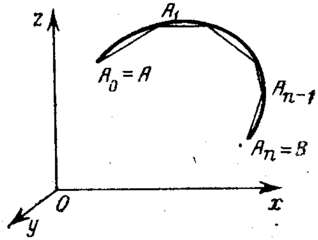

Рис. 6.3.

Введем новую функцию, $s = F(t)$, равную длине дуги $\smile{AC}$, соответствующей изменению параметра на отрезке $[a, t]$. В интегральном исчислении будет доказано, что функция $F(t)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна и имеет непрерывную производную на $[a, b]$, определяемую формулой

$$F'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} > 0. \tag{5}$$

Кроме того, $F(a) = 0$. Но тогда $s$ есть строго возрастающая функция, отображающая отрезок $[a, b]$ изменения $t$ на некоторый отрезок $[0, l]$ изменения $s$, и существует обратная к ней функция

$$t = \Lambda(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant l),$$

непрерывная и имеющая непрерывную производную $\Lambda'(s) > 0$.

Следовательно, $s$ можно рассматривать как один из допустимых параметров нашей гладкой кривой Г:

$$x = \varphi(\Lambda(s)), \quad y = \psi(\Lambda(s)), \quad z = \chi(\Lambda(s)) \qquad (0 \leqslant s \leqslant l).$$

Пусть теперь $\tau$ есть произвольный допустимый параметр Г, связанный с $t$ при помощи функции $t = \lambda(\tau)$, имеющей не равную нулю непрерывную производную. Тогда знак $\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt}\lambda'(\tau)$ зависит от знака $\lambda'(\tau)$. Таким образом, учитывая формулу производной функции от функции, будем иметь

$$\frac{ds}{d\tau} = \lambda'(\tau)\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} = \pm\sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \psi_1'(\tau)^2 + \chi_1'(\tau)^2}, \tag{6}$$

где

$$x = \varphi_1(\tau) = \varphi(\lambda(\tau)), \qquad y = \psi_1(\tau) = \psi(\lambda(\tau)),$$
$$z = \chi_1(\tau) = \chi(\lambda(\tau)) \qquad (\tau \in (c, d)) \tag{7}$$

— уравнения Г, выраженные через параметр $\tau$, а перед корнем стоит знак «+» или «−» в зависимости от того, будет ли $s$ возрастать или убывать при возрастании $\tau$.

Отсюда

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{8}$$

где при $d\tau > 0$ надо поставить «+» в первом случае и «−» во втором. Однако при $d\tau < 0$ надо, наоборот, поставить в первом случае «−», а во втором «+».

Если в равенстве (6) положить $\tau = s$, то справа перед корнем надо поставить знак «+», и мы получим равенство $1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$. Заметим, что мы считали, что $s = 0$ при $t = a$ и что $s$ возрастает вместе с $t$.

Заметим еще, что приведенное выше определение длины дуги Г внешне зависит от параметрического представления кривой. На самом деле *длина дуги есть инвариант, не зависящий от выбора параметра* $t$, при помощи которого задана кривая (см. § 10.3, (3)).

## § 6.8. Касательная. Нормаль к плоской кривой

В пространстве, где определена прямоугольная система координат $(x, y, z)$, пусть задана гладкая кривая, определяемая вектором $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (a, b)$ (рис. 6.4). Будем считать, что отсчет дуги выбран так, что ее длина возрастает вместе с возрастанием параметра $t$ (так же, как в § 6.7).

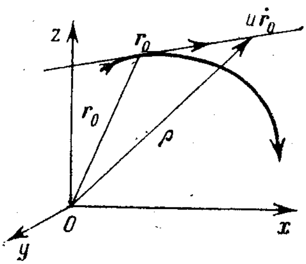


Рис. 6.4.

Положим $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = (x_0', y_0', z_0')$. Вектор $\dot{\mathbf{r}}_0$ имеет направление касательной к нашей кривой в точке $t_0$, поэтому произвольная точка касательной $\rho = (x, y, z)$ определяется вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + u\dot{\mathbf{r}}_0, \tag{1}$$

где $u$ — произвольное число (текущий параметр касательной).

Равенство (1) есть уравнение *касательной к кривой в точке* $t_0$ в векторной форме.