где

$$\begin{gathered} x=\varphi_1(\tau)=\varphi(\lambda(\tau)), \qquad y=\psi_1(\tau)=\psi(\lambda(\tau)), \\ z=\chi_1(\tau)=\chi(\lambda(\tau)) \qquad (\tau\in(c,d)) \end{gathered} \tag{7}$$

— уравнения Г, выраженные через параметр τ, а перед корнем стоит знак «+» или «—» в зависимости от того, будет ли s возрастать или убывать при возрастании τ.

Отсюда

$$ds=\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \tag{8}$$

где при $d\tau>0$ надо поставить «+» в первом случае и «—» во втором. Однако при $d\tau<0$ надо, наоборот, поставить в первом случае «—», а во втором «+».

Если в равенстве (6) положить $\tau=s$, то справа перед корнем надо поставить знак «+», и мы получим равенство $1=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$. Заметим, что мы считали, что $s=0$ при $t=a$ и что s возрастает вместе с t.

Заметим еще, что приведенное выше определение длины дуги Г внешне зависит от параметрического представления кривой. На самом деле *длина дуги есть инвариант, не зависящий от выбора параметра* t, при помощи которого задана кривая (см. § 10.3, (3)).

§ 6.8. Касательная. Нормаль к плоской кривой

В пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), пусть задана гладкая кривая, определяемая вектором $\mathbf{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$, $t\in(a, b)$ (рис. 6.4). Будем считать, что отсчет дуги выбран так, что ее длина возрастает вместе с возрастанием параметра t (так же, как в § 6.7).

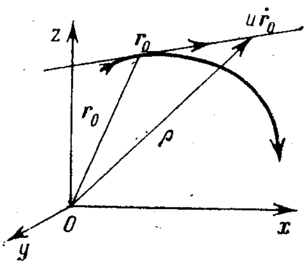

Рис. 6.4.

Положим $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)=(x_0, y_0, z_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}_0=\dot{\mathbf{r}}(t_0)=(x_0', y_0', z_0')$. Вектор $\dot{\mathbf{r}}_0$ имеет направление касательной к нашей кривой в точке t_0, поэтому произвольная точка касательной $\rho=(x, y, z)$ определяется вектором

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_0+u\dot{\mathbf{r}}_0, \tag{1}$$

где u — произвольное число (текущий параметр касательной).

Равенство (1) есть уравнение *касательной к кривой в точке* t_0 в векторной форме.

Из (1) следует, что уравнения касательной в декартовых координатах имеют вид

$$x-x_0=ux_0',\quad y-y_0=uy_0',\quad z-z_0=uz_0',$$

или

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}. \tag{2}$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образует положительное направление касательной (направление $\dot{\mathbf{r}}_0$) соответственно с положительными направлениями осей координат x, y, z. Очевидно

$$\cos\alpha=\frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2}}=\left(\frac{dx}{ds}\right)_0,$$

$$\cos\beta=\frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2}}=\left(\frac{dy}{ds}\right)_0,$$

$$\cos\gamma=\frac{z_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2}}=\left(\frac{dz}{ds}\right)_0,$$

где $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0$ обозначает, что в $\frac{dx}{ds}$ надо подставить значение $s=s_0$, соответствующее $t=t_0$. Перед корнями стоит знак «+», потому что мы согласились, что длина дуги возрастает вместе с t.

Кривую, заданную в плоскости x, y, можно рассматривать как частный случай кривой в пространстве, у которой $z(t)\equiv 0$. Поэтому соотношениям (2) в плоском случае соответствует одно уравнение

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}.$$

Положительное направление касательной образует в этом случае с осью x угол α, для которого

$$\cos\alpha=\frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}}=\left(\frac{dx}{ds}\right)_0,\quad \sin\alpha=\frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}}=\left(\frac{dy}{ds}\right)_0.$$

В плоском случае можно еще определить понятие *нормали в точке t_0 кривой*, то есть прямой, принадлежащей рассматриваемой плоскости и проходящей через точку t_0 перпендикулярно к касательной. В некоторых вопросах важно задать положительное направление нормали $\mathbf{N}$. Оно задается так, чтобы направление $\mathbf{T}$ касательной, идущее в сторону возрастания t, и $\mathbf{N}$ образовали систему, ориентированную так же, как система осей координат x, y, иначе говоря, угол, образованный **T** и **N**, *должно быть возможно* непрерывным передвижением по плоскости совместить с координатным углом так, что **T** совпадет с положительным направлением оси x, а **N** — с положительным направлением оси y (рис. 6.5 и 6.6).

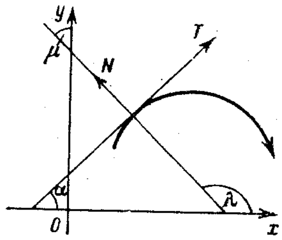

Рис. 6.5.

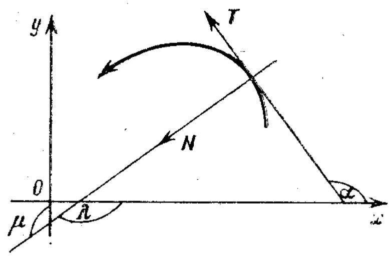

Рис. 6.6.

Пусть λ, μ — суть углы, образованные положительным направлением нормали соответственно с осями x, y. Из рисунков видно, что сделанное соглашение приводит нас к формулам *)

$$\cos\lambda = -\sin\alpha = -\left(\frac{dy}{ds}\right)_0, \quad \cos\mu = \cos\alpha = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0.$$

§ 6.9. Кривизна и радиус кривизны кривой. Плоская кривая. Эволюта и эвольвента

Кривизной окружности радиуса R называется число $1/R$. Это число можно получить как отношение угла между касательными в концах какой-нибудь дуги окружности к длине этой дуги. Последнее определение дает идею определения кривизны, пригодного для произвольных гладких кривых.

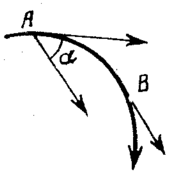

Рис. 6.7.

Рассмотрим гладкую кривую Γ (рис. 6.7). Она спрямляема, и имеет смысл говорить о длине любой ее дуги $\smile{AB}$. Угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ между (положительными) направлениями касательных к дуге в ее точках A и B называется *углом смежности дуги* $\smile{AB}$. Отношение угла смежности дуги $\smile{AB}$ к ее длине называется *средней кривизной дуги* $\smile{AB}$ (см. рис. 6.7). Наконец, *кривизной кривой* Γ в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности α дуги $\smile{AB}$ кривой к ее длине Δs $(\Delta s > 0)$, когда последняя стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}. \tag{1}$$

*) Запомнить это можно, взяв векторное произведение $(0, 0, 1) \times \times (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$.