иначе говоря, угол, образованный **T** и **N**, *должно быть возможно* непрерывным передвижением по плоскости совместить с координатным углом так, что **T** совпадет с положительным направлением оси x, а **N** — с положительным направлением оси y (рис. 6.5 и 6.6).

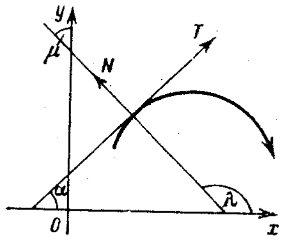

Рис. 6.5.

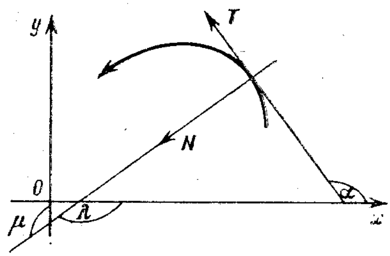

Рис. 6.6.

Пусть λ, μ — суть углы, образованные положительным направлением нормали соответственно с осями x, y. Из рисунков видно, что сделанное соглашение приводит нас к формулам *)

$$\cos\lambda = -\sin\alpha = -\left(\frac{dy}{ds}\right)_0, \quad \cos\mu = \cos\alpha = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0.$$

§ 6.9. Кривизна и радиус кривизны кривой. Плоская кривая. Эволюта и эвольвента

Кривизной окружности радиуса R называется число $1/R$. Это число можно получить как отношение угла между касательными в концах какой-нибудь дуги окружности к длине этой дуги. Последнее определение дает идею определения кривизны, пригодного для произвольных гладких кривых.

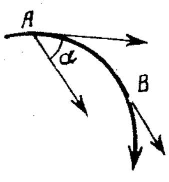

Рис. 6.7.

Рассмотрим гладкую кривую Γ (рис. 6.7). Она спрямляема, и имеет смысл говорить о длине любой ее дуги $\smile{AB}$. Угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ между (положительными) направлениями касательных к дуге в ее точках A и B называется *углом смежности дуги* $\smile{AB}$. Отношение угла смежности дуги $\smile{AB}$ к ее длине называется *средней кривизной дуги* $\smile{AB}$ (см. рис. 6.7). Наконец, *кривизной кривой* Γ в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности α дуги $\smile{AB}$ кривой к ее длине Δs $(\Delta s > 0)$, когда последняя стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}. \tag{1}$$

*) Запомнить это можно, взяв векторное произведение $(0,\ 0,\ 1) \times (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0) = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0)$.

Таким образом, $0 \leqslant K \leqslant \infty$. По определению, величина $R = 1/K$ (где считается, что $0 = 1/\infty$, $\infty = 1/0$) называется *радиусом кривизны* Γ в точке A.

Заметим, что угол смежности α ($\alpha \geqslant 0$) дуги $\overset{\smile}{AB}$ равен углу между векторами $\dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}}$, где $r(t)$ — радиус-вектор точки Γ, или углу между соответствующими единичными векторами $\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ и $\boldsymbol{\tau}(t + \Delta t)$. Поэтому косинус угла α, очевидно, равен скалярному произведению $(\tau(t), \tau(t + \Delta t))$, а сам угол α может быть записан в виде

$$\alpha = \arccos(\tau(t), \tau(t + \Delta t)) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi),$$

откуда видно, что для гладкой кривой из $\Delta t \to 0$ следует $\alpha \to 0$.

Из векторной алгебры известно, что

$$\sin\alpha = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times (\dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}})|}{|\dot{\mathbf{r}}||\dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \Delta\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}||\dot{\mathbf{r}} \times \Delta\dot{\mathbf{r}}|}, \quad \Delta\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - \dot{\mathbf{r}}(t), \qquad (2)$$

так как $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$. Знаменатель здесь не равен нулю, потому что у гладкой кривой $\dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$. При $\Delta t \to 0$ знаменатель стремится к $|\dot{\mathbf{r}}|^2 > 0$, а числитель стремится к нулю. Введем длину дуги $s = s(t)$ нашей кривой. Длина куска $\overset{\smile}{AB}$ равна $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ ($\Delta t > 0$). Из $\Delta s \to 0$ следует $\Delta t \to 0$, потому что t и s оба — допустимые параметры гладкой кривой (см. § 6.7).

Будем теперь предполагать, что радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ нашей гладкой кривой Γ имеет вторую производную $\ddot{\mathbf{r}}(t)$, и при этом условии докажем существование конечной кривизны Γ в точке A (определяемой параметром t).

В силу (1), (2) кривизна Γ в точке t равна (пояснения ниже)

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\dot{\mathbf{r}} \times \dfrac{\Delta\dot{\mathbf{r}}}{\Delta t}\right|}{|\dot{\mathbf{r}}||\dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t)|\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}, \qquad (3)$$

т. е.

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \qquad (4)$$

В третьем члене (3) мы заменили α на $\sin\alpha$ под знаком предела. Это законно, ведь если для стремящейся к нулю последовательности значений Δs соответствующие значения $\alpha > 0$, то $\sin\alpha \approx \alpha$ $(\alpha \to 0)$ и применима теорема 2 § 4.10, если же значения $\alpha = 0$, начиная с некоторого, то для них $\sin\alpha = \alpha = 0$ и снова верно второе равенство (3).

Если параметр $t = s$ есть длина дуги Γ, то, как мы знаем, $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ и вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к $\dot{\mathbf{r}}(s)$, поэтому

$$K = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|, \quad R = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|}. \tag{5}$$

В плоском случае ($z \equiv 0$) выражение кривизны через координаты выглядит так:

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, где функция f в окрестности точки x имеет непрерывную производную и в самой точке вторую производную, то, полагая в последней формуле $t = x$, получим

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{7}$$

(в полярных координатах см. § 7.26, упражнение 1).

Пусть $A = (x, f(x))$ есть точка кривой Γ. Точка O, лежащая на нормали к Γ в точке A на расстоянии $R = 1/K$ от A в сторону вогнутости Γ, называется *центром кривизны* Γ *в точке* A.

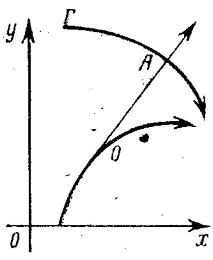

Рис. 6.8.

Кривая γ, являющаяся геометрическим местом центров O кривизны плоской кривой Γ, называется *эволютой* Γ. Сама кривая Γ называется *эвольвентой* γ.

На рис. 6.8 изображена плоская кривая Γ. Направление возрастания ее длины дуги s показано стрелкой. Вторая производная $y = f''(x) < 0$. Поэтому радиус кривизны в точке A равен

$$R = -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \tag{8}$$

Направляющие косинусы касательной (направленной в сторону возрастания s) равны $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, а направляющие косинусы единичной нормали $\mathbf{v}$, идущей от A в сторону вогнутости Γ, задаются числами

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right). \tag{9}$$

Координаты (ξ, η) центра O кривизны Γ в точке A определяются, очевидно, равенствами

$$\xi = x + \frac{dy}{ds} R, \quad \eta = y - \frac{dx}{ds} R. \tag{10}$$

Это таким образом, уравнения *эволюты*.

В случае расположения и ориентировки кривой Г как на рис. 6.8 $y''_x < 0$, $x'_t > 0$. Поэтому из формулы

$$y''_x = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}$$

следует, что числитель ее правой части отрицательный, и потому [см. (6)]

$$R = \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{3/2}}{y'_t x''_t - x'_t y''_t}, \quad s'_t = \left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Следовательно, из (10) следует, что уравнения эволюты кривой Г в параметрической форме имеют вид

$$\xi = x - y'_t \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}, \quad \eta = y + x'_t \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}. \tag{12}$$

Они сохраняются и при других расположениях и ориентировке относительно осей координат.

Ниже дается другой вывод уравнений (12) эволюты кривой Г.

Вводим для Г в качестве параметра длину дуги s. Соответствующую вектор-функцию записываем, как это обычно делают, в виде $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$, хотя формально следовало бы употреблять другие обозначения, например, $\mathbf{r}_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$. Вектор $\dot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к вектору $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, а следовательно, и к вектору $\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{r}}(s)/|\ddot{\mathbf{r}}(s)|$. Вектор $\mathbf{v}$, очевидно, есть единичный вектор нормали, направленный внутрь Г, поэтому радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ эволюты определяется векторными уравнениями (см. (5))

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{v}R = \mathbf{r} + \ddot{\mathbf{r}}(s)R^2$$

или, что все равно, двумя скалярными равенствами $(\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta))$:

$$\xi = x + x''_s \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^3}{\left(x'_t y''_t - y'_t x''_t\right)^2}, \quad \eta = y + y''_s \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^3}{\left(x'_t y''_t - y'_t x''_t\right)^2}. \tag{13}$$

Но

$$x'_s = x'_t \frac{dt}{ds} = \frac{x'_t}{s'_t}, \quad s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t},$$

$$x''_s = \frac{s'_t x''_t - x'_t \frac{d}{dt} s'_t}{s'^3_t} = \frac{s'_t x''_t - \frac{x'_t\left(x'_t x''_t + y'_t y''_t\right)}{s'_t}}{s'^3_t} =$$

$$= \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right) x''_t - x'_t\left(x'_t x''_t + y'_t y''_t\right)}{s'^4_t} = -y'_t \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{s'^4_t}$$

и, аналогично,

$$y''_s = \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right) y''_t - y'_t\left(x'_t x''_t + y'_t y''_t\right)}{s'^4_t} = x'_t \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{s'^4_t}.$$

Подставляя полученные выражения x''_s, y''_s в (13), получаем уравнения (12).

Отметим два факта, характеризующие связь между эвольвентой и эволютой:

1) Нормаль к эвольвенте в любой ее точке s является в то же время касательной к эволюте.

В самом деле [см. (11)], $\frac{1}{R} = y'_s x''_s - x'_s y''_s$, и свойство 1) вытекает из того, что касательные векторы к Γ и γ в соответствующих точках перпендикулярны [см. (10)]:

$$x'_s \xi'_s + y'_s \eta'_s = \left(x'^2_s + y'^2_s\right) + \left(y''_s x'_s - x''_s y'_s\right) R + \left(x'_s y'_s - x'_s y'_s\right) R'_s =$$
$$= 1 - \frac{1}{R} R + 0 = 0.$$

2) Справедливо равенство

$$\sigma' = \pm R', \tag{14}$$

где, если A и O — соответствующие точки эвольвенты Γ и эволюты γ, то R — радиус кривизны Γ в A, а σ — длина дуги γ, соединяющей O с некоторой неподвижной точкой γ. Знак «+» или «−» зависит от направления отсчета σ.

В самом деле, равенство (10) запишем следующим образом:

$$\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} = -R\mathbf{v},$$

где $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ — соответственно радиус-векторы A и O, откуда $(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) = R^2$. Дифференцируя по t, получим (пояснения ниже)

$$RR' = (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}) = -(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = -R|\dot{\boldsymbol{\rho}}| = \mp R\sigma',$$

что влечет за собой (14).

Второе равенство цепи следует из того, что в силу уже доказанного свойства 1) $(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$, третье — из того, что $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}| = R$ и векторы $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$ и $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ направлены одинаково; четвертое следует из того, что $|\dot{\rho}| = \pm\sigma$, где знак $\pm$ зависит от выбора отсчета σ на эволюте.

Например, если σ возрастает вместе с t, то $R' = -\sigma'$, откуда $\int\limits_{t_1}^{t_2} R'dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \sigma'\,dt$, и в силу формулы Ньютона—Лейбница

$$R_2 - R_1 = \sigma_1 - \sigma_2,$$

где σ_1, R_1 соответствуют значению t_1, а σ_2, R_2 соответствуют значению t_2. Таким образом, в рассматриваемом случае увеличение длины дуги эволюты вызывает равное ему уменьшение радиуса кривизны эвольвенты.

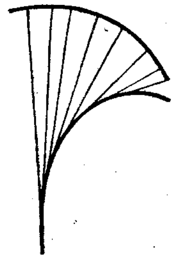

Рис. 6.9.

Представим себе нить, навернутую на эволюту. Пусть она сматывается с последней, будучи все время натянутой. Отделяясь от эволюты, она, очевидно, все время будет касаться эволюты. Свободный же ее конец будет описывать эвольвенту (рис. 6.9). Так как длина нити может быть произвольной, то эволюта порождает бесконечно много эвольвент.

Пример 1. Эволюта циклоиды

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \tag{14}$$

есть кривая $\xi = t + \sin t$, $\eta = -1 + \cos t$. Полагая $t = \tau + \pi$, получим уравнения

$$\xi - \pi = \tau - \sin\tau, \quad \eta + 2 = 1 - \cos\tau,$$

определяющие исходную кривую, но только сдвинутую (эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная исходной; рис. 6.10).

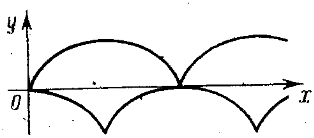

Рис. 6.10.

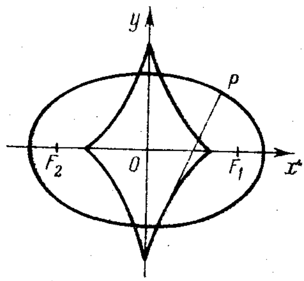

Рис. 6.11.

Пример 2. Эволюта эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a \geqslant b > 0)$ есть астроида (рис. 6.11),

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

(см. § 6.5, пример 2).