Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 7.1. Открытое множество

В n-мерном пространстве $R_n = R$ зададим произвольную точку $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Шаром* (или *замкнутым шаром*) радиуса $r > 0$ с центром в этой точке называют множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R$, для которых выполняется неравенство

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \left[\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right]^{1/2} \leqslant r.$$

Открытым шаром радиуса r с центром в $\mathbf{x}^0$ мы будем называть множество точек $\mathbf{x}$, для которых выполняется строгое неравенство $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r$.

Определим *прямоугольник* в R (замкнутый прямоугольник или прямоугольный параллелепипед в R) как множество точек $\mathbf{x} \in R$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$ ($a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$). В случае $n = 3$ это реальный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям прямоугольных координат (x_1, x_2, x_3).

Можно еще определить *открытый прямоугольник в R* как множество точек, удовлетворяющих строгим неравенствам $a_j < x_j < b_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

Множество точек $\mathbf{x}$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_j - x_j^0| \leqslant a$ ($j = 1, \ldots, n$), где $a > 0$ — заданное число, естественно назвать *кубом* (или *замкнутым кубом*) в R с центром в точке $\mathbf{x}^0$ и стороной длины $2a$. Конечно, при $n = 3$ это будет куб с гранями, параллельными осям (прямоугольной) системы координат.

Наконец, *открытый куб* (в R) определяется при помощи неравенств $|x_j - x_j^0| < a$ ($j = 1, \ldots, n$).

Неравенства $|x_j - x_j^0| \leqslant \left(\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2} < r$ говорят, что если точка x принадлежит шару радиуса r с центром в x^0, то она принадлежит и кубу со стороной длины $2r$ с тем же центром. Таким образом, *куб со стороной* длины $2r$ *с центром в* $\mathbf{x}^0$ *содержит в себе шар радиуса* r с тем же центром. С другой стороны, если точка $\mathbf{x}$ принадлежит кубу, $|x_j - x_j^0| < a$ ($j = 1, \ldots, n$), то для нее выполняется неравенство $\left(\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2} < \sqrt{n}\, a$, показывающее, что *шар с центром в* $\mathbf{x}^0$ *радиуса* $a\sqrt{n}$ *содержит в себе куб со стороной длины* $2a$ *с тем же центром* (см. § 6.2 (12)).

Мы рассматривали открытые шары и кубы, но это же верно и для замкнутых шаров и кубов.

Зададим произвольное множество E точек $\mathbf{x} \in R$. По определению, $\mathbf{x}^0$ называется *внутренней точкой* множества E, если существует открытый шар с центром в этой точке, полностью принадлежащий E. Слово *шар* здесь можно заменить на *куб*, потому что всякий шар содержит некоторый куб с тем же центром, и наоборот.

Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Это определение можно еще сформулировать так: *множество E открытое, если из того, что какая-нибудь точка принадлежит ему, следует, что она внутренняя точка.*

Отсюда видно, что *пустое множество есть открытое множество.*

Открытый шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r \tag{1}$$

есть открытое множество. В самом деле, пусть $\mathbf{y}$ есть принадлежащая ему точка, т. е. $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| = \rho < r$, и $\mathbf{x}$ — произвольная точка, принадлежащая шару

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon \qquad (\varepsilon < r - \rho). \tag{2}$$

Для нее $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) < \varepsilon + \rho < r$. Это показывает, что шар (2) принадлежит шару (1).

Предоставляем читателю доказать, что *открытый прямоугольник*, в частности, открытый куб, *есть открытое множество.*

Пересечение G_1G_2 двух открытых множеств G_1 и G_2 есть открытое множество. В самом деле, пусть точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит к G_1G_2. Так как $\mathbf{x}^0$ есть внутренняя точка как G_1 так и G_2, то существуют два открытых шара с центром в $\mathbf{x}^0$, из которых первый принадлежит G_1, а второй — G_2. Пересечение их есть, очевидно, открытый шар (наименьший из них), принадлежащий G_1G_2.

Легко видеть, что *сумма конечного или счетного числа открытых множеств есть открытое множество.* Однако пересечение счетного числа открытых множеств может и не быть открытым, например, пересечение открытых шаров $|\mathbf{x}| < 1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ есть точка (нулевая точка).

Окрестностью точки $\mathbf{x}^0 \in R_n$ называют произвольное открытое множество, содержащее в себе эту точку. Очевидно, что *пересечение двух окрестностей* $\mathbf{x}^0$ *есть в свою очередь окрестность* $\mathbf{x}^0$.

После сказанного понятие внутреней точки множества E можно еще определить так: $\mathbf{x}^0$ *есть внутренняя точка E, если суще-*

ствует принадлежащая E окрестность $\mathbf{x}^0$. В самом деле, если $\mathbf{x}^0$ — внутренняя точка по первому определению, то найдется принадлежащий E открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$, но последний есть окрестность $\mathbf{x}^0$. Наоборот, если x^0 есть внутренняя точка по второму определению, то существует принадлежащая E окрестность $\mathbf{x}^0$, которая, будучи открытым множеством, содержит открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$.

В дальнейшем в нашем распоряжении будет много примеров открытых множеств, определенных строго математически, а сейчас мы призовем читателя к геометрической интуиции, сказав, что если с произвольно геометрического тела содрать его границу, то получим открытое множество.

В ближайших параграфах мы будем рассматривать функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ или, что все равно, от точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, определенные на окрытых множествах n-мерного пространства.

Множество E называется *связным*, если любые его две точки x', x'' можно соединить принадлежащей ему непрерывной кривой, т. е. если существует непрерывная вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\mathbf{x}(0) = x'$, $\mathbf{x}(1) = x''$, $\mathbf{x}(t) \in E$ (см. § 6.5).

Отрезком $\overline{x'x''}$ называется кривая $x(t) = tx' + (1-t)x''$, $t \in [0, 1]$, очевидно, непрерывная и соединяющая точки x', x''.

Множество называется *выпуклым*, если вместе с точками x', x'' принадлежит ему соединяющий их отрезок. (Примеры см. конец § 7.3.)

Замечание 1. Куб Δ в R_n можно определить при помощи неравенств:

$$\Delta = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, n\},$$

где $2d = b_j - a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Легко видеть, что Δ есть сумма 2^n кубов вида $\{\lambda_j \leqslant x_j \leqslant \mu_j;\ j = 1, \ldots, n\}$, где всевозможными способами надо положить $\lambda_j = a_j$, $\mu_j = (a_j + b_j)/2$ или $\lambda_j = (a_j + b_j)/2$, $\mu_j = b_j$. Говорят, что этим куб Δ разбит на 2^n равных кубов (имеющих стороны длины d).

Замечание 2. Мы называем кубом в R_n то, что при $n = 3$ есть обычный (трехмерный) куб со сторонами, параллельными осям координат. Общее определение n-мерного куба требует введения ортогонального преобразования координат:

$$x_j - x_j^0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k,$$

где $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in R_n$ и α_{jk} — действительные числа, для которых $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n)$. Например, замкнутым кубом Δ в R_n с центром в $\mathbf{x}^0 \in R_n$ и сторонами длины $2d$ называется такое множество точек $\mathbf{x} \in R_n$, которое после надлежащего (зависящего от Δ) ортогонального преобразования координат превращается во множество вида $\{|\xi_k| \leqslant d;\ k = 1, \ldots, n\}$.

Подобное замечание относится и к n-мерным прямоугольникам.