§ 7.10. Функции на множестве. Свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве

Пусть на произвольном множестве A точек n-мерного пространства ($A \subset R = R_n$) задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{x}^0$ — предельная точка A. Будем говорить, что число Λ *есть предел f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A, если* $\lim\limits_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) = \Lambda$, какова бы ни была сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k \in A$, отличных от $\mathbf{x}^0$.

Это определение эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется куб или шар с центром в $\mathbf{x}^0$, для всех точек $\mathbf{x}$ которого, содержащихся в A, но отличных от $\mathbf{x}^0$, выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - \Lambda| < \varepsilon$. Эквивалентность этих определений доказывается аналогично тому, как это делается в случае предела функции f в точке $\mathbf{x}^0$ без добавления «на множестве» (см. § 4.1 и 7.2).

Аналогично доказывается условие Коши существования предела f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A: *для того чтобы существовал (конечный) предел f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялось неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A$, для которых $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$, $0 < |\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0| < \delta$.*

Будем говорить, что определенная на A функция f непрерывна на A в точке $\mathbf{x}^0 \in A$, если

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}^k \in A}} f(\mathbf{x}^k) = f(\mathbf{x}^0), \tag{1}$$

какова бы ни была сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k \in A$.

Обратим внимание, что если $\mathbf{x}^0$ есть *изолированная точка* A, т. е. не являющаяся предельной для A, то существует шар с центром в $\mathbf{x}^0$, содержащий в себе только одну точку множества A, а именно $\mathbf{x}^0$. Но тогда, если $\mathbf{x}^k \in A$ и $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$, то $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$ для всех $k > N$, где N достаточно велико и равенство (1) выполняется автоматически.

Таким образом, *если $\mathbf{x}^0$ есть изолированная точка A, то функция, определенная на A, необходимо непрерывна на A в этой точке.*

Если функция f, определенная на A, непрерывна в любой точке A, то говорят, что f непрерывна на A.

Докажем две теоремы, выражающие замечательные свойства функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве; они обобщают соответствующие свойства непрерывных функций от одной переменной, заданных на отрезке.

Теорема 1. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что она не ограничена на A; тогда для любого натурального k найдется такая точка $\mathbf{x}^k \in A$, что

$$|f(\mathbf{x}^k)| > k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Полученная последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена. Из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k'}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in R_n$. Вследствие замкнутости A точка $\mathbf{x}^0 \in A$, а в силу непрерывности f в $\mathbf{x}^0$ на A $\lim\limits_{\mathbf{x}^{k'} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k'}) = f(\mathbf{x}^0)$, и мы получили противоречие с неравенствами (2).

Теорема 2. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, достигает на нем своего максимума и минимума.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы известно, что f ограничена на A. Поэтому она имеет на A конечные точные нижнюю и верхнюю грани:

$$m = \inf_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}), \quad M = \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Из свойства верхней грани следует, что для любого натурального k найдется точка $\mathbf{x}^k \in A$ такая, что

$$M - \frac{1}{k} < f(\mathbf{x}^k) \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Полученная последовательность $\{x^k\}$ ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k_j}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0$. В силу замкнутости A точка $\mathbf{x}^0 \in A$ и в силу непрерывности f на A $\lim\limits_{\mathbf{x}^{k_j} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k_j}) = f(\mathbf{x}^0)$. С другой стороны, из (3) следует, что этот предел должен равняться числу M. Но тогда

$$f(\mathbf{x}^0) = M = \max_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Аналогично доказывается существование точки $\mathbf{y}^0 \in A$, в которой f достигает минимума на A:

$$f(\mathbf{y}^0) = m = \min_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим снова пока произвольное множество $A \subset R$ и определенную на нем не обязательно непрерывную функцию f, но ограниченную на A.

Зададим число $\delta > 0$ и введем величину

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta \\ \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|, \tag{4}$$

называемую *модулем непрерывности f на множестве A*. В правой части (4) взята точная верхняя грань абсолютных величин разностей значений f, соответствующих всевозможным парам точек $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$, отстоящих друг от друга на расстоянии меньшем, чем δ.

Модуль непрерывности есть функция от δ, очевидно, неотрицательная. Она не убывает, потому что если $0 < \delta < \delta_1$, то

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta \\ \mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta_1 \\ \mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| = \omega(\delta_1).$$

Поэтому существует предел

$$\omega(0+0) = \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \omega(\delta) = \lambda \geqslant 0. \tag{5}$$

По определению полагаем далее $\omega(0) = \lambda$.

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что каковы бы ни были $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$, $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \lambda + \varepsilon,$$

где число λ определено в (5).

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального k найдутся точки $\mathbf{x}_k'$, $\mathbf{x}_k'' \in A$ такие, что $|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''| < 1/k$, в то время как $|f(\mathbf{x}_k') - f(\mathbf{x}_k'')| \geqslant \lambda + \varepsilon_0$. Но тогда

$$\omega(1/k) \geqslant |f(x_k') - f(x_k'')| \geqslant \lambda + \varepsilon_0$$

при любом k и $\lambda = \omega(0+0) = \lim\limits_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant \lambda + \varepsilon_0$, что невозможно.

Введем определение:

1) Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве A, если ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на A стремится к нулю при $\delta \to 0$, т. е.

$$\omega(0+0) = \lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0. \tag{6}$$

Приведем другое эквивалентное определение.

2) Функция f называется *равномерно непрерывной* на A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$ с $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta$ имеет место $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon$.

Определение 1) влечет за собой 2) в силу теоремы 3, где надо положить $\lambda = 0$. Наоборот, если имеет место 2), то, задав $\varepsilon > 0$ и подобрав $\delta > 0$ так, как это сказано в 2), получим

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{\mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A \\ |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \varepsilon,$$

и так как ω монотонно не убывает, то отсюда, следует (6), т. е. 1).

Докажем теперь важную теорему.

Теорема 4. *Функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве A, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого натурального k найдется пара точек

$$\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}''_k \in A, \quad |\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k| < 1/k, \tag{7}$$

для которых

$$|f(\mathbf{x}'_k) - f(\mathbf{x}''_k)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{8}$$

В силу ограниченности последовательности $\{\mathbf{x}'_k\}$ и замкнутости A, существует подпоследовательность $\{\mathbf{x}'_{k_j}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in A$: $\mathbf{x}'_{k_j} \to \mathbf{x}^0$. В силу (7) тогда и $\mathbf{x}''_{k_j} \to \mathbf{x}^0$, и потому вследствие непрерывности f в $\mathbf{x}^0$,

$$\lim_{k_j \to \infty} |f(\mathbf{x}'_{k_j}) - f(\mathbf{x}''_{k_j})| = |f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^0)| = 0,$$

что противоречит (8).

Рассмотрим функцию f, заданную на множестве $A \in R_n$. Будем предполагать, что она ограничена на A. Пусть $\mathbf{x}^0 \in A$ и $\delta > 0$. Обозначим через V_δ шар $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leqslant \delta$ с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса δ и положим $M_\delta = \sup\limits_{\mathbf{x} \in AV_\delta} f(\mathbf{x})$, $m_\delta = \inf\limits_{\mathbf{x} \in AV_\delta} f(\mathbf{x})$. Очевидно, что M_δ есть невозрастающая, а m_δ — неубывающая функции от δ, поэтому разность $M_\delta - m_\delta$ есть невозрастающая функция от δ. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} (M_\delta - m_\delta) = \omega(\mathbf{x}^0),$$

который называют *колебанием функции f в точке* $\mathbf{x}^0$. Нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 5. *Для того чтобы определенная на замкнутом ограниченном множестве A функция f была непрерывной на A в точке $\mathbf{x}^0 \in A$, необходимо и достаточно, чтобы ее колебание в этой точке равнялось нулю* ($\omega(\mathbf{x}^0) = 0$).

Докажем еще теорему:

Теорема 6. *Пусть A есть замкнутое ограниченное множество и $\lambda > 0$. Тогда множество E_λ тех точек $\mathbf{x} \in A$, для которых $\omega(\mathbf{x}) \geqslant \lambda$, замкнуто.*

В самом деле, если $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ и $\omega(\mathbf{x}^k) \geqslant \lambda$ ($k = 1, 2, \ldots$), то $\mathbf{x}^0 \in A$ и, кроме того, если $V_\delta(\mathbf{x}_0)$ есть некоторый шар с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса δ, то найдется такое k, что точка $\mathbf{x}^k$ будет находиться строго внутри $V_\delta(\mathbf{x}_0)$. Но тогда можно указать шар $V_\sigma(\mathbf{x}^k)$ с центром в $\mathbf{x}^k$ и настолько малого радиуса, что

$$V_\sigma(\mathbf{x}^k) \in V_\sigma(\mathbf{x}_0),$$

и, следовательно,

$$M_\delta(\mathbf{x}_0) - m_\delta(\mathbf{x}^0) \geqslant M_\sigma(\mathbf{x}^k) - m_\sigma(\mathbf{x}^k) \geqslant \omega(\mathbf{x}^k) \geqslant \lambda.$$

Таким образом, $M_\delta(\mathbf{x}^0) - m_\delta(\mathbf{x}^0) \geqslant \lambda$ для любого шара $V_\delta(\mathbf{x}^0)$. Но тогда $\omega(\mathbf{x}^0) \geqslant \lambda$.

Пример 1. Множество Ω называется *выпуклым*, если вместе с любыми его двумя точками принадлежит Ω и отрезок, их соединяющий.

Для выпуклого множества Ω имеет место неравенство

$$\omega(\delta_1+\delta_2, f) \leqslant \omega(\delta_1, f)+\omega(\delta_2, f) \quad 0 \leqslant \delta_1, \delta_2. \tag{9}$$

Действительно, если $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$, $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''| < \delta_1+\delta_2$, то на отрезке, соединяющем $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, можно указать точку $\mathbf{x}$ такую, что $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}| < \delta_1$, $|\mathbf{x}''-\mathbf{x}| < \delta_2$. Поэтому для $\delta_1, \delta_2 > 0$.

$$\omega(\delta_1+\delta_2; f) = \sup_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''| \leqslant \delta_1+\delta_2} |f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x}'')| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}| \leqslant \delta_1} |f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x})| + \sup_{|\mathbf{x}''-\mathbf{x}| \leqslant \delta_2} |f(\mathbf{x}'')-f(\mathbf{x})| = \omega(\delta_1, f)+\omega(\delta_2, f),$$

где верхние грани распространяются на произвольные $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$, удовлетворяющие написанным неравенствам. Случаи $\delta_1=0$ и $\delta_2=0$ получаются переходом к пределу. Из (9) следует неравенство

$$\omega(m\delta) \leqslant m\omega(\delta) \tag{10}$$

при любом натуральном m.

Пример 2. Из (9) и монотонности ω следуют неравенства

$$0 \leqslant \omega(\delta_2, f)-\omega(\delta_1, f) < \omega(\delta_2-\delta_1, f), \quad 0 < \delta_1 < \delta_2, \tag{11}$$

откуда видно, что $\omega(t, f)$ есть непрерывная функция от $t \geqslant 0$, если f непрерывна на замыкании ограниченной выпуклой области Ω.

Пример 3. Функция (Дирихле), равная нулю на рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и единице на иррациональных, разрывна во всех точках $[0, 1]$ относительно $[0, 1]$, но это не мешает ей быть непрерывной на множестве A рациональных точек (относительно A).

Упражнения.

1. Показать, что модули непрерывности $\omega(t)$ функций

1) $\sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ (см. начало § 15.5);
2) x^2 $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;
3) $\sin x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\sin\frac{1}{x}$ $(0 < |x| \leqslant 1)$;
5) $\sin x$ $(-\infty < x < \infty)$

определяются равенствами:

1) $\omega(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 1 & (1 \leqslant t); \end{cases}$ 2) $\omega(t) = \begin{cases} 1-(1-t)^2 & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 1 & (1 \leqslant t); \end{cases}$

3) $\omega(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leqslant t \leqslant \pi/2), \\ 1 & (\pi/2 \leqslant t); \end{cases}$ 4) $\omega(t) = 2 \quad (0 \leqslant t)$;

5) $\omega(t) = \begin{cases} 2\sin\frac{t}{2} & (0 \leqslant t \leqslant \pi), \\ 2 & (\pi \leqslant t). \end{cases}$

2. Показать, что если функция $\omega(t)$ $(t \geqslant 0)$ непрерывна при $t=0$ и удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \omega(\delta_2)-\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2-\delta_1) \quad (0 < \delta_1 < \delta_2),$$

то она есть модуль непрерывности самой себя.

3. Расстоянием точки $\mathbf{x}^0 \in R$ до множества $E \subset R$ называется число

$$r(\mathbf{x}^0, E) = \inf_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = \inf_{\mathbf{x} \in E} \sqrt{\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2}.$$

Здесь и далее E, E_1, E_2, F — непустые множества.

Доказать, что если E — замкнутое множество (ограниченное или неограниченное), то расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ достигается в некоторой точке $\mathbf{y} \in E$, т. е. $r(\mathbf{x}^0, E) = \min_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = |\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|$.

4. Доказать, что расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ есть непрерывная функция от $\mathbf{x}^0$.

5. Расстоянием между двумя множествами E_1 и E_2 называют число

$$r(E_1, E_2) = \inf_{\substack{\mathbf{x}' \in E_1 \\ \mathbf{x}'' \in E_2}} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|.$$

Доказать, что если E_1 и E_2 — замкнутые множества и одно из них ограничено, то существуют две точки $\mathbf{y} \in E_1$ и $\mathbf{z} \in E_2$, для которых эта нижняя грань достигается, т. е. $r(E_1, E_2) = \min_{\mathbf{x}' \in E_1, \mathbf{x}'' \in E_2} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

Таким образом, если E_1 и E_2 не пересекаются, то $r(E_1, E_2) > 0$.

6. Доказать, что если F замкнутое, а Ω открытое ограниченное множество и $F \subset \Omega$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество F^ε точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до F не превышает ε, принадлежит Ω.

§ 7.11. Продолжение равномерно непрерывной функции. Частная производная на границе области

Теорема 1. *Если функция f равномерно непрерывна на незамкнутом множестве A, то ее можно продолжить на $\bar{A} - A$, и притом единственным образом, так, что полученная (продолженная) определенная на $\bar{A}$ функция будет непрерывной на $\bar{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0 \in \bar{A} - A$, таким образом, $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка A. В силу равномерной непрерывности f на A для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon \tag{1}$$

для всех $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta. \tag{2}$$

Но для точек $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|$, $|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}^0| < \delta/2$ выполняется неравенство (2), а поэтому и (1). В силу условия Коши тогда существует предел f на A в точке $\mathbf{x}^0$. Естественно его обозначить через $f(\mathbf{x}^0)$. Этим наша функция f теперь уже определена на $\bar{A}$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_0'$ и $\mathbf{x}_0''$ — произвольные точки $\bar{A}$ такие, что

$$|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0''| < \delta. \tag{3}$$

Тогда найдутся две последовательности точек $\mathbf{x}_k', \mathbf{x}_k'' \in A$ таких, что $|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''| < \delta$ и $\mathbf{x}_k' \to \mathbf{x}_0'$, $\mathbf{x}_k'' \to \mathbf{x}_0''$ $(k \to \infty)$. Для них для любого k выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}_k') - f(\mathbf{x}_k'')| < \varepsilon$, которое после перехода к пределу при $k \to \infty$ превращается в соотношение

$$|f(\mathbf{x}_0') - f(\mathbf{x}_0'')| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$