3. Расстоянием точки $\mathbf{x}^0 \in R$ до множества $E \subset R$ называется число

$$r(\mathbf{x}^0, E) = \inf_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = \inf_{\mathbf{x} \in E} \sqrt{\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2}.$$

Здесь и далее E, E_1, E_2, F — непустые множества.

Доказать, что если E — замкнутое множество (ограниченное или неограниченное), то расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ достигается в некоторой точке $\mathbf{y} \in E$, т. е. $r(\mathbf{x}^0, E) = \min_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = |\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|$.

4. Доказать, что расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ есть непрерывная функция от $\mathbf{x}^0$.

5. Расстоянием между двумя множествами E_1 и E_2 называют число

$$r(E_1, E_2) = \inf_{\substack{\mathbf{x}' \in E_1 \\ \mathbf{x}'' \in E_2}} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|.$$

Доказать, что если E_1 и E_2 — замкнутые множества и одно из них ограничено, то существуют две точки $\mathbf{y} \in E_1$ и $\mathbf{z} \in E_2$, для которых эта нижняя грань достигается, т. е. $r(E_1, E_2) = \min_{\mathbf{x}' \in E_1, \mathbf{x}'' \in E_2} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

Таким образом, если E_1 и E_2 не пересекаются, то $r(E_1, E_2) > 0$.

6. Доказать, что если F замкнутое, а Ω открытое ограниченное множество и $F \subset \Omega$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество F^ε точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до F не превышает ε, принадлежит Ω.

§ 7.11. Продолжение равномерно непрерывной функции. Частная производная на границе области

Теорема 1. *Если функция f равномерно непрерывна на незамкнутом множестве A, то ее можно продолжить на $\bar{A} - A$, и притом единственным образом, так, что полученная (продолженная) определенная на $\bar{A}$ функция будет непрерывной на $\bar{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0 \in \bar{A} - A$, таким образом, $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка A. В силу равномерной непрерывности f на A для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon \tag{1}$$

для всех $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta. \tag{2}$$

Но для точек $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|$, $|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}^0| < \delta/2$ выполняется неравенство (2), а поэтому и (1). В силу условия Коши тогда существует предел f на A в точке $\mathbf{x}^0$. Естественно его обозначить через $f(\mathbf{x}^0)$. Этим наша функция f теперь уже определена на $\bar{A}$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_0'$ и $\mathbf{x}_0''$ — произвольные точки $\bar{A}$ такие, что

$$|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0''| < \delta. \tag{3}$$

Тогда найдутся две последовательности точек $\mathbf{x}_k', \mathbf{x}_k'' \in A$ таких, что $|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''| < \delta$ и $\mathbf{x}_k' \to \mathbf{x}_0'$, $\mathbf{x}_k'' \to \mathbf{x}_0''$ $(k \to \infty)$. Для них для любого k выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}_k') - f(\mathbf{x}_k'')| < \varepsilon$, которое после перехода к пределу при $k \to \infty$ превращается в соотношение

$$|f(\mathbf{x}_0') - f(\mathbf{x}_0'')| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что коль скоро $\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0'' \in \bar{A}$ и выполняется неравенство (3), автоматически имеет место неравенство (4). Иначе говоря, мы доказали, что продолженная функция f равномерно непрерывна на $\bar{A}$. Но тогда она непрерывна в любой точке $\bar{A}$.

Другого удовлетворяющего условию теоремы продолжения не может быть, потому что если бы мы в какой-нибудь точке $\mathbf{x}^0 \in \bar{A} - A$ положили f не равной пределу $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})$, то f была бы разрывной в этой точке. Теорема доказана.

Пусть $G \subset R$ — открытое множество и $\bar{G}$ — его замыкание, а f — непрерывная на $\bar{G}$ функция. В некоторых точках границы Γ множества G может оказаться невозможным задать ту или иную частную производную от f. Например, если G есть круг σ: $x^2 + y^2 < 1$, то в точке $A = (0, 1)$ его границы не имеет смысла производная f_x' от определенной на $\bar{\sigma}$ функции $f(x, y)$,— соседние с A точки в направлении оси x не принадлежат $\bar{\sigma}$. Однако иногда можно ввести обобщенное понятие частной производной от f по непрерывности. Если наша функция f не только непрерывна на $\bar{G}$, но имеет на G частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, равномерно непрерывные на G, то, пользуясь теоремой 1, эти последние можно продолжить по непрерывности и на $\bar{G} - G = \Gamma$ — границу G. Эти продолжения обычно называют соответствующими частными производными от f на Γ, хотя это уже будут, вообще говоря, *обобщенные производные*. Но если какая-нибудь точка $x^0 \in \Gamma$ допускает определение обычной односторонней производной (правой или левой), то последняя совпадает в этой точке с соответствующей обобщенной производной. Чтобы убедиться в этом, обратимся к нашему примеру с кругом σ. Для точки $B = (x^0, y^0)$, $x_0 > 0$, $|y^0| < 1$ границы σ имеет место

$$\frac{f(x^0 - h, y^0) - f(x^0, y^0)}{-h} = f_x'(\bar{x}^0 - \theta h, y^0) \to f_x'(x^0, y^0), \quad h \to 0, \ h > 0,$$

где справа в качестве предела стоит обобщенная производная. Но тогда, очевидно, существует равная ей обычная левая производная от f в (x^0, y^0).

В дальнейшем (см. § 19.8, теоремы 1, 3, 4) доказывается, что если $(n-1)$-мерная граница Γ области G (или ее часть γ) непрерывно дифференцируема r раз, то функцию f, равномерно непрерывную на G вместе со своими производными до порядка r включительно, можно продолжить за пределы Γ (или γ) с сохранением дифференциальных свойств. В частности, во всех точках Γ (или γ) продолженная функция $\bar{f}(x)$ будет иметь обычные непрерывные частные производные до порядка r включительно.

§ 7.12. Лемма о вложенных прямоугольниках и лемма Бореля

Лемма. *Пусть задана последовательность прямоугольников*

$$\Delta_k = \{a_j^{(k)} \leqslant x_j \leqslant b_j^k, \ j = 1, \ldots, n\} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

вложенных друг в друга $(\Delta_k \supset \Delta_{k+1})$, *с диаметром* $d_k = \sqrt{\sum\limits_1^n (b_j^{(k)} - a_j^{(k)})^2}$, *стремящимся к нулю* $(d_k \to 0)$. *Тогда су-*