Мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что коль скоро $\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0'' \in \bar{A}$ и выполняется неравенство (3), автоматически имеет место неравенство (4). Иначе говоря, мы доказали, что продолженная функция f равномерно непрерывна на $\bar{A}$. Но тогда она непрерывна в любой точке $\bar{A}$.

Другого удовлетворяющего условию теоремы продолжения не может быть, потому что если бы мы в какой-нибудь точке $\mathbf{x}^0 \in \bar{A} - A$ положили f не равной пределу $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})$, то f была бы разрывной в этой точке. Теорема доказана.

Пусть $G \subset R$ — открытое множество и $\bar{G}$ — его замыкание, а f — непрерывная на $\bar{G}$ функция. В некоторых точках границы Γ множества G может оказаться невозможным задать ту или иную частную производную от f. Например, если G есть круг σ: $x^2 + y^2 < 1$, то в точке $A = (0, 1)$ его границы не имеет смысла производная f_x' от определенной на $\bar{\sigma}$ функции $f(x, y)$,— соседние с A точки в направлении оси x не принадлежат $\bar{\sigma}$. Однако иногда можно ввести обобщенное понятие частной производной от f по непрерывности. Если наша функция f не только непрерывна на $\bar{G}$, но имеет на G частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, равномерно непрерывные на G, то, пользуясь теоремой 1, эти последние можно продолжить по непрерывности и на $\bar{G} - G = \Gamma$ — границу G. Эти продолжения обычно называют соответствующими частными производными от f на Γ, хотя это уже будут, вообще говоря, *обобщенные производные*. Но если какая-нибудь точка $x^0 \in \Gamma$ допускает определение обычной односторонней производной (правой или левой), то последняя совпадает в этой точке с соответствующей обобщенной производной. Чтобы убедиться в этом, обратимся к нашему примеру с кругом σ. Для точки $B = (x^0, y^0)$, $x_0 > 0$, $|y^0| < 1$ границы σ имеет место

$$\frac{f(x^0 - h, y^0) - f(x^0, y^0)}{-h} = f_x'(x^0 - \theta h, y^0) \to f_x'(x^0, y^0), \quad h \to 0, \ h > 0,$$

где справа в качестве предела стоит обобщенная производная. Но тогда, очевидно, существует равная ей обычная левая производная от f в (x^0, y^0).

В дальнейшем (см. § 19.8, теоремы 1, 3, 4) доказывается, что если $(n-1)$-мерная граница Γ области G (или ее часть γ) непрерывно дифференцируема r раз, то функцию f, равномерно непрерывную на G вместе со своими производными до порядка r включительно, можно продолжить за пределы Γ (или γ) с сохранением дифференциальных свойств. В частности, во всех точках Γ (или γ) продолженная функция $\bar{f}(x)$ будет иметь обычные непрерывные частные производные до порядка r включительно.

§ 7.12. Лемма о вложенных прямоугольниках и лемма Бореля

Лемма. *Пусть задана последовательность прямоугольников*

$$\Delta_k = \{a_j^{(k)} \leqslant x_j \leqslant b_j^k, \ j = 1, \ldots, n\} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

вложенных друг в друга $(\Delta_k \supset \Delta_{k+1})$, *с диаметром* $d_k = \sqrt{\sum\limits_1^n (b_j^{(k)} - a_j^{(k)})^2}$, *стремящимся к нулю* $(d_k \to 0)$. *Тогда су-*

ществует единственная точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R$, *принадлежащая всем* Δ_k.

Доказательство. Из условия леммы следует, что при каждом $j = 1, \ldots, n$ отрезки $[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ вложены друг в друга и длина их стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому в силу аксиомы о вложенных отрезках для каждого j существует единственное число x_j^0, принадлежащее всем отрезкам $[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ одновременно. Точка $\mathbf{x}^0$, имеющая своими координатами эти числа, очевидно, и есть та, о которой говорится в лемме.

Лемма Бореля*). *Пусть некоторая бесконечная система открытых множеств* V *(например, открытых кубов или шаров) покрывает замкнутое ограниченное множество* $E \subset R$. *Тогда в этой системе существует конечное число указанных множеств* V, *все же покрывающих* E.

Доказательство. Так как множество E ограничено, то существует куб $\Delta \subset R$, которому принадлежит E. Допустим, что лемма неверна. Разделим Δ на 2^n равных частичных кубов. Тогда среди последних, очевидно, обязательно найдется такой, который мы обозначим через Δ_1, что теорема для множества $E\Delta_1$ также неверна (любая конечная система множеств V не покрывает $E\Delta_1$). Разделим Δ_1 на 2^n равных кубов; среди них найдется снова такой, который мы обозначим через Δ_2, что для множества $E\Delta_2$ теорема неверна. Продолжив этот процесс неограниченно, получим систему включенных друг в друга кубов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, диаметры которых стремятся к нулю, таких, что для множества $E\Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ теорема неверна. Существует (в силу предыдущей леммы) точка $\mathbf{x}^0 \in R$, принадлежащая всем Δ_k. В силу замкнутости E она принадлежит E и потому покрыта некоторым множеством V_0 нашей системы. Так как V_0 — открытое множество, то $\Delta_k \subset V_0$ при некотором достаточно большом k. Следовательно, $E\Delta_k \subset V_0$.

Мы пришли к противоречию, потому что, с одной стороны, $E\Delta_k$ покрывается одним множеством V_0, с другой,— не существует никакой конечной системы множеств V, покрывающих $E\Delta_k$.

§ 7.13. Формула Тейлора

Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, заданную на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ и имеющую на Ω непрерывные частные производные того порядка, который нужен, чтобы имели смысл формулы, о которых будет идти речь ниже.

---

*) Э. Борель (1871—1956) — французский математик.