ществует единственная точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R$, *принадлежащая всем* Δ_k.

Доказательство. Из условия леммы следует, что при каждом $j = 1, \ldots, n$ отрезки $[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ вложены друг в друга и длина их стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому в силу аксиомы о вложенных отрезках для каждого j существует единственное число x_j^0, принадлежащее всем отрезкам $[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ одновременно. Точка $\mathbf{x}^0$, имеющая своими координатами эти числа, очевидно, и есть та, о которой говорится в лемме.

Лемма Бореля*). *Пусть некоторая бесконечная система открытых множеств V (например, открытых кубов или шаров) покрывает замкнутое ограниченное множество $E \subset R$. Тогда в этой системе существует конечное число указанных множеств V, все же покрывающих E.*

Доказательство. Так как множество E ограничено, то существует куб $\Delta \subset R$, которому принадлежит E. Допустим, что лемма неверна. Разделим Δ на 2^n равных частичных кубов. Тогда среди последних, очевидно, обязательно найдется такой, который мы обозначим через Δ_1, что теорема для множества $E\Delta_1$ также неверна (любая конечная система множеств V не покрывает $E\Delta_1$). Разделим Δ_1 на 2^n равных кубов; среди них найдется снова такой, который мы обозначим через Δ_2, что для множества $E\Delta_2$ теорема неверна. Продолжив этот процесс неограниченно, получим систему включенных друг в друга кубов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, диаметры которых стремятся к нулю, таких, что для множества $E\Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ теорема неверна. Существует (в силу предыдущей леммы) точка $\mathbf{x}^0 \in R$, принадлежащая всем Δ_k. В силу замкнутости E она принадлежит E и потому покрыта некоторым множеством V_0 нашей системы. Так как V_0 — открытое множество, то $\Delta_k \subset V_0$ при некотором достаточно большом k. Следовательно, $E\Delta_k \subset V_0$.

Мы пришли к противоречию, потому что, с одной стороны, $E\Delta_k$ покрывается одним множеством V_0, с другой,— не существует никакой конечной системы множеств V, покрывающих $E\Delta_k$.

§ 7.13. Формула Тейлора

Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, заданную на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ и имеющую на Ω непрерывные частные производные того порядка, который нужен, чтобы имели смысл формулы, о которых будет идти речь ниже.

*) Э. Борель (1871—1956) — французский математик.

Зафиксируем точку $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \subset \Omega$ и пусть $\delta > 0$ есть достаточно малое число, чтобы все точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из ее окрестности

$$|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = \sqrt{\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2} < \delta \tag{1}$$

принадлежали Ω.

Введем вспомогательную функцию

$$F(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) = f\left(x_1^0 + t\left(x_1 - x_1^0\right), \ldots, x_n^0 + t\left(x_n - x_n^0\right)\right)$$

от переменной $t \in [0, 1]$. Таким образом, мы временно фиксируем еще точку $\mathbf{x}$ из окрестности (1). Однако впоследствии $\mathbf{x}$ будем считать переменной. Очевидно, что

$$F(0) = f(\mathbf{x}^0), \quad F(1) = f(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Согласно теореме о производной сложной функции

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)). \tag{3}$$

Таким образом,

$$F'(0) = \sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0). \tag{4}$$

Далее,

$$F''(t) = \sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right) \sum_{k=1}^n \left(x_k - x_k^0\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_k - x_k^0\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) \tag{5}$$

и

$$F''(0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_k - x_k^0\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}^0). \tag{6}$$

Рассуждая по индукции, мы придем к производной

$$F^{(l)}(t) = \sum_{j_1=1}^n \ldots \sum_{j_l=1}^n \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \ldots \left(x_{j_l} - x_{j_l}^0\right) \frac{\partial^l f(x^0 + t(x - x^0))}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}} \tag{7}$$

и ее значению при $t = 0$:

$$F^{(l)}(0) = \sum_{j_1=1}^n \ldots \sum_{j_l=1}^n \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \ldots \left(x_{j_l} - x_{j_l}^0\right) \frac{\partial^l f(x^0)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}. \tag{8}$$

Пусть f имеет на Ω непрерывные частные производные до порядка l включительно. Тогда F имеет непрерывные обыкновенные производные по t до того же порядка l включительно. Поэтому имеет место разложение по формуле Тейлора для одной переменной:

$$F(t) = \sum_0^{l-1} \frac{t^k}{k!} F^{(k)}(0) + r_l(t),$$

где $r_l(t) = (t^l/l!)F^{(l)}(\theta t)$ $(0 < \theta < 1)$ и θ зависит от x и t. Отсюда

$$F(1) = \sum_0^{l-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) + R_l, \quad R_l(x) = r_l(1) = \frac{1}{l!} F^{(l)}(\theta). \tag{9}$$

Следовательно,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_k=1}^{n} \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \dots \left(x_{j_k} - x_{j_k}^0\right) \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} + R_l(\mathbf{x}), \tag{10}$$

$$R_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{l!} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_l=1}^{n} \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \dots \left(x_{j_l} - x_{j_l}^0\right) \frac{\partial^l f(x^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_l}}. \tag{11}$$

Это и есть формула Тейлора функции n переменных в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ с остаточным членом R_l в форме Лагранжа.

Надо иметь в виду, что среди членов кратной суммы $\sum\limits_{j_1=1}^{n} \dots \sum\limits_{j_k=1}^{n}$ в (10) имеются равные между собой. Напишем несколько членов формулы Тейлора в случае двух переменных:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_2^0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0 (x_1 - x_1^0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0 (x_2 - x_2^0)^2\right] + \dots + \frac{1}{(l-1)!}\left((x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \right.$$
$$\left. + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0^{l-1} f + R_l,$$

$$R_l = \frac{1}{l!}\left((x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_\theta^l f \quad (0 < \theta < 1).$$

Здесь применено символическое обозначение:

$$\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0^k f = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \xi_1^j \xi_2^{k-j} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}}\right)_0.$$

Знаки $(\quad)_0$ $(\quad)_\theta$ обозначают, что в f вместо $\mathbf{x}$ подставляется $\mathbf{x}^0$, соответственно $\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$.

Подобным образом в случае трех переменных

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \left[\left(x_1 - x_1^0\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(x_2 - x_2^0\right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \left(x_3 - x_3^0\right) \frac{\partial}{\partial x_3}\right]_0^k f + R_l,$$

$$R_l = \frac{1}{l!}\left[\left(x_1 - x_1^0\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \left(x_3 - x_3^0\right) \frac{\partial}{\partial x_3}\right]_\theta^l f, \qquad 0 < \theta < 1,$$

где употребляемая символика, надо полагать, уже понятна читателю.

Формулу Тейлора можно еще записать в следующей компактной форме:

$$f(x) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant l-1} \frac{(x - x^0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} f^{(k)}(\mathbf{x}^0) + R_l,$$

$$R_l = \sum_{|\mathbf{k}|=l} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} f^{(k)}(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \qquad (0 < \theta < 1),$$

где $|\mathbf{k}| = \sum_1^n k_j, \quad \mathbf{k}! = k_1! \ldots k_n!\ (0! = 1), \quad f^{(k)}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$
$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} = \left(x_1 - x_1^0\right)^{k_1} \ldots \left(x_n - x_n^0\right)^{k_n}.$

Формула Тейлора очень часто употребляется в случаях $l = 1, 2$. При $l = 1$ она после переноса в левую часть равенства $f(\mathbf{x}^0)$ имеет вид

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)} \left(x_j - x_j^0\right), \tag{12}$$

и представляет собой обобщение одномерной формулы конечных приращений Лагранжа на n-мерный случай.

При $l = 2$ она записывается в следующем виде:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \left(x_j - x_j^0\right) + R_2; \tag{13}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_{\mathbf{x}^0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + \varepsilon\rho^2, \quad (14)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2 \to 0$.

Действительно, в силу непрерывности рассматриваемых производных

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_{\mathbf{x}^0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 + \varepsilon_{kl},$$

где $\varepsilon_{kl} \to 0$ при $\rho \to 0$, поэтому, полагая $\eta = \max_{k,l} |\varepsilon_{kl}|$, заключаем, что второе слагаемое в правой части (14) не превышает по абсолютной величине

$$\eta \sum_k \sum_l |x_k - x_k^0||x_l - x_l^0| = \eta\left(\sum_k |x_k - x_k^0|\right)^2 \leqslant \eta n \rho^2.$$

В таком случае его можно записать в виде $\varepsilon\rho^2$, где $|\varepsilon| < n\eta \to 0$ $(\rho \to 0)$.

Последнюю сумму в (14) можно записать в виде $A(\xi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_k\xi_l$, где $a_{kl} = a_{lk} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0$, $\xi_k = (x_k - x_k^0)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, $A(\xi)$ есть квадратическая форма от n переменных. Если считать, что $\xi_k = x_k - x_k^0 = dx_k$, то

$$A(\xi) = d^2 f_0 = \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 dx_k dx_l$$

есть уже знакомый нам второй дифференциал от f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующий независимым дифференциалам $dx_1, \ldots, dx_n$.

Заметим еще, что остаток (9) формулы Тейлора функции $F(t)$ от одной переменной можно записать в интегральной форме (см. § 9.17):

$$r_l(t) = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^t (t-u)^{l-1} F^{(l)}(u)\, du.$$

Ему соответствует в силу (7) следующее выражение для остатка формулы Тейлора функции $f(x)$ многих переменных:

$$R_l(\mathbf{x}) = r_l(1) = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^1 (1-u)^{l-1} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_l=1}^{n} (x_{j_1} - x_{j_1}^0) \cdots (x_{j_l} - x_{j_l}^0) \times$$

$$\times\frac{\partial^l f(\mathbf{x}^0+u(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0))}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_l}}\,du=l\sum_{|\mathbf{k}|=l}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!}\int(1-u)^{l-1}f^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^0+u(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0))\,du. \tag{15}$$

В силу непрерывности подынтегральных функций в (15) по (u, x) сами интегралы суть непрерывные функции от параметра $\mathbf{x}$ (см. § 13.14, теорема 1). Больше того, если наша функция f имеет в окрестности $\mathbf{x}^0$ непрерывные производные $(l+s)$-го порядка, то эти интегралы можно дифференцировать (под знаком интеграла) s раз (см. § 13.14, теорема 3).

§ 7.14. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Единственность

Пусть в окрестности $\Omega\subset R_n$ точки $\mathbf{x}^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ задана функция $f(\mathbf{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$ и для всех $\mathbf{x}$ из некоторого шара $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta$ (принадлежащего Ω) имеет место представление

$$f(\mathbf{x})=P_N(\mathbf{x})+o(\rho^N)\quad\left(\rho=\left[\left(\sum_{j=1}^n(x_j-x_j^0)^2\right]^{1/2}\to 0\right), \tag{1}$$

где

$$P_N(\mathbf{x})=\sum_{|k|\leqslant N}a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^k$$
$$\left(a_{\mathbf{k}}=a_{k_1,\ldots,k_n},\ |\mathbf{k}|=\sum_1^n k_j,\ (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^k=\prod_{j=1}^n\left(x_j-x_j^0\right)^{k_j}\right); \tag{2}$$

тогда говорят, что функция f разложена в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Например, мы знаем, что если функция f имеет в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ непрерывные частные производные до порядка N включительно, то она представима по формуле (1).

Докажем, что представление функции $f(\mathbf{x})$ по формуле (1) единственно, иначе говоря, если известно, что f наряду с (1) представлена в виде

$$f(\mathbf{x})=\sum_{|\mathbf{k}|\leqslant N}a'_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}+o(\rho^N)\quad(\rho\to 0,\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta), \tag{3}$$

где $a'_k=a'_{k_1,\ldots,k_n}$ — постоянные коэффициенты, то $a_k=a'_k$ $(|\mathbf{k}|\leqslant N)$. В самом деле, вычитая (3) из (1), получим равенство

$$0\equiv\sum_{|\mathbf{k}|\leqslant N}\alpha_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}+o(\rho^N)\quad(\rho\to 0,\ \alpha_{\mathbf{k}}=(a_{\mathbf{k}}-a'_{\mathbf{k}})), \tag{4}$$

справедливое для $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta$. Зафиксируем точку $\mathbf{x}$ и введем переменную точку $\mathbf{z}_t=\mathbf{x}^0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$, зависящую от $t\in[0, 1]$. Очевидно, что $\mathbf{z}_t-\mathbf{x}^0=t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ и $|\mathbf{z}_t-\mathbf{x}^0|=t|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$. Поэтому если в (4) заменить $\mathbf{x}$ на $\mathbf{z}_t$, то получим

$$0\equiv\sum_{|\mathbf{k}|\leqslant N}\alpha_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}t^{|\mathbf{k}|}+o(t^N)\quad(t\to 0).$$