$$\times \frac{\partial^l f(\mathbf{x}^0 + u(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial \mathbf{x}_{j_1} \ldots \partial \mathbf{x}_{j_l}} du = l \sum_{|\mathbf{k}|=l} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \int (1-u)^{l-1} f^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^0 + u(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))\, du. \tag{15}$$

В силу непрерывности подынтегральных функций в (15) по (u, x) сами интегралы суть непрерывные функции от параметра $\mathbf{x}$ (см. § 13.14, теорема 1). Больше того, если наша функция f имеет в окрестности $\mathbf{x}^0$ непрерывные производные $(l+s)$-го порядка, то эти интегралы можно дифференцировать (под знаком интеграла) s раз (см. § 13.14, теорема 3).

§ 7.14. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Единственность

Пусть в окрестности $\Omega \subset R_n$ точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и для всех $\mathbf{x}$ из некоторого шара $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$ (принадлежащего Ω) имеет место представление

$$f(\mathbf{x}) = P_N(\mathbf{x}) + o(\rho^N) \quad \left(\rho = \left[\left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^0)^2\right]^{1/2} \to 0\right), \tag{1}$$

где

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant N} a_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^k$$

$$\left(a_{\mathbf{k}} = a_{k_1, \ldots, k_n}, \ |\mathbf{k}| = \sum_1^n k_j, \ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^k = \prod_{j=1}^n (x_j - x_j^0)^{k_j}\right); \tag{2}$$

тогда говорят, что функция f разложена в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Например, мы знаем, что если функция f имеет в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ непрерывные частные производные до порядка N включительно, то она представима по формуле (1).

Докажем, что представление функции $f(\mathbf{x})$ по формуле (1) единственно, иначе говоря, если известно, что f наряду с (1) представлена в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a'_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} + o(\rho^N) \quad (\rho \to 0, \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta), \tag{3}$$

где $a'_k = a'_{k_1, \ldots, k_n}$ — постоянные коэффициенты, то $a_k = a'_k$ ($|\mathbf{k}| \leqslant N$). В самом деле, вычитая (3) из (1), получим равенство

$$0 \equiv \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} + o(\rho^N) \quad (\rho \to 0, \ \alpha_{\mathbf{k}} = (a_{\mathbf{k}} - a'_{\mathbf{k}})), \tag{4}$$

справедливое для $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$. Зафиксируем точку $\mathbf{x}$ и введем переменную точку $\mathbf{z}_t = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$, зависящую от $t \in [0, 1]$. Очевидно, что $\mathbf{z}_t - \mathbf{x}^0 = t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ и $|\mathbf{z}_t - \mathbf{x}^0| = t|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$. Поэтому если в (4) заменить $\mathbf{x}$ на $\mathbf{z}_t$, то получим

$$0 \equiv \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} t^{|\mathbf{k}|} + o(t^N) \quad (t \to 0).$$

Полученное равенство можно записать в виде

$$0 \equiv \sum_{l=0}^{N} t^l \sum_{|\mathbf{k}|=l} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} + o\left(t^N\right) \quad (t \to 0).$$

Но тогда (см. § 5.9, лемма) имеет место

$$\sum_{|\mathbf{k}|=l} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{k} = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, N), \tag{5}$$

какова бы ни была точка $\mathbf{x}$ шара $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$. Итак, равенство (5) имеет место тождественно для всех $\mathbf{x}$ из указанного шара. Если от левой части (5) взять производную порядка $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $|\mathbf{p}| = l \leqslant N$, то получим $\mathbf{p}! \cdot \alpha_{\mathbf{p}} = 0$, откуда $\alpha_{\mathbf{p}} = 0$, что и требовалось доказать.

Пример. При $x, y \to 0$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)} = [1 + x + x^2 + o(x^2)][1 + y + y^2 + o(y^2)] =$$
$$= 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + o(x^2) + x^2y + xy^2 + x^2y^2 + o(y^2) =$$
$$= 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + o(\rho^2) \quad (\rho \to 0);$$

мы получили разложение функции ψ в окрестности точки (0, 0) по формуле Тейлора с остаточным членом $o(\rho^2)$, $\rho \to 0$ в форме Пеано.

§ 7.15. Локальный (абсолютный) экстремум функции

Пусть на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Говорят, что *f достигает своего (абсолютного) локального максимума в точке* $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, если существует положительное число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $\mathbf{x}$, для которых

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2} < \delta, \tag{1}$$

функция $f(\mathbf{x})$ определена и подчиняется неравенству $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)$. Аналогично, по определению, *f достигает в $\mathbf{x}^0$ своего (абсолютного) локального минимума*, если существует ее окрестность (1), на которой функция f определена и удовлетворяет неравенству $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$.

Локальный минимум или максимум называют *локальным экстремумом.*

Если функция f достигает в $\mathbf{x}^0$ локального экстремума и имеет в ней частные производные первого порядка, то последние должны в этой точке равняться нулю:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

потому что тогда для каждого j функция

$$f\left(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$$