Полученное равенство можно записать в виде

$$0 \equiv \sum_{l=0}^{N} t^l \sum_{|\mathbf{k}|=l} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} + o(t^N) \quad (t \to 0).$$

Но тогда (см. § 5.9, лемма) имеет место

$$\sum_{|\mathbf{k}|=l} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{k} = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, N), \tag{5}$$

какова бы ни была точка $\mathbf{x}$ шара $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$. Итак, равенство (5) имеет место тождественно для всех $\mathbf{x}$ из указанного шара. Если от левой части (5) взять производную порядка $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $|\mathbf{p}| = l \leqslant N$, то получим $\mathbf{p}! \cdot \alpha_{\mathbf{p}} = 0$, откуда $\alpha_{\mathbf{p}} = 0$, что и требовалось доказать.

Пример. При $x, y \to 0$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)} = [1 + x + x^2 + o(x^2)][1 + y + y^2 + o(y^2)] =$$
$$= 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + o(x^2) + x^2y + xy^2 + x^2y^2 + o(y^2) =$$
$$= 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + o(\rho^2) \quad (\rho \to 0);$$

мы получили разложение функции ψ в окрестности точки (0, 0) по формуле Тейлора с остаточным членом $o(\rho^2)$, $\rho \to 0$ в форме Пеано.

§ 7.15. Локальный (абсолютный) экстремум функции

Пусть на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Говорят, что *f достигает своего (абсолютного) локального максимума в точке* $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, если существует положительное число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $\mathbf{x}$, для которых

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2} < \delta, \tag{1}$$

функция $f(\mathbf{x})$ определена и подчиняется неравенству $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)$. Аналогично, по определению, *f достигает в* $\mathbf{x}^0$ *своего (абсолютного) локального минимума*, если существует ее окрестность (1), на которой функция f определена и удовлетворяет неравенству $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$.

Локальный минимум или максимум называют *локальным экстремумом*.

Если функция f достигает в $\mathbf{x}^0$ локального экстремума и имеет в ней частные производные первого порядка, то последние должны в этой точке равняться нулю:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

потому что тогда для каждого j функция

$$f(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

от одной переменной x_j имеет локальный экстремум в x_j^0 и ее производная по x_j при $x_j = x_j^0$, равная $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0$, должна равняться нулю.

Из сказанного следует, что если мы хотим отыскать точки $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, где f достигает локального экстремума, мы должны их искать среди точек $\mathbf{x} \in \Omega$, где f либо не имеет какой-либо частной производной либо имеет их, но они равны нулю. Нас будет интересовать второй случай. Покажем, как можно, разлагая функцию f по формуле Тейлора, узнать, имеет ли на самом деле f в указанной точке $\mathbf{x}^0$ экстремум и какой (максимум или минимум)?

Пусть функция f имеет в окрестности $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$ непрерывные производные второго порядка и ее первые производные все обращаются в нуль в точке $\mathbf{x}^0$. Тогда ее разложение по формуле Тейлора (при $l = 2$) может быть записано так:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_k\xi_l + \varepsilon\rho^2; \tag{2}$$

$$a_{kl} = a_{lk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0; \quad \xi_k = x_k - x_k^0, \quad \varepsilon \to 0 \text{ при } \rho = \sqrt{\sum_1^n \xi_k^2} \to 0.$$

Квадратическая форма $A(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_k\xi_l$ может обладать одним из следующих четырех свойств:

1) форма $A(\xi)$ строго определенна положительно, т. е. $A(\xi) > 0$ для любых $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с $\rho > 0$;

2) форма $A(\xi)$ строго определенна отрицательно, т. е. $A(\xi) < 0$ для любых ξ с $\rho > 0$;

3) форма $A(\xi)$ определенна, но не строго, т. е. $A(\xi) \geqslant 0$ для всех ξ или $A(\xi) \leqslant 0$ для всех ξ и при этом существует точка

$$\xi' = (\xi_1', \ldots, \xi_n') \text{ с } \rho' = \sqrt{\sum_1^n \xi_k'^2} > 0 \text{ такая, что } A(\xi') = 0;$$

4) форма $A(\xi)$ не определенна, т. е. существуют такие ξ' и ξ'', что $A(\xi') > 0$, $A(\xi'') < 0$.

Докажем, что *в случае* 1) *функция f достигает в $\mathbf{x}^0$ локального минимума, в случае* 2) — *локального максимума, в случае же* 4) *в точке $\mathbf{x}^0$ заведомо нет экстремума. Наконец, в случае* 3) *вопрос остается открытым — при данной информации функция может иметь экстремум, но может и не иметь его.*

Положим для ξ с $\rho > 0$ $\eta = \xi/\rho = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, т. е. $\eta_j = \xi_j/\rho$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \rho^2(\Phi(\eta) + \varepsilon), \tag{3}$$

где $\Phi(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\eta_k\eta_l$,

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2 = \frac{1}{\rho^2} \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1. \tag{4}$$

Таким образом, функцию $\Phi(\eta)$ мы должны рассматривать на шаровой поверхности (4), представляющей собой ограниченное замкнутое множество σ. Очевидно, что $\Phi(\eta)$ непрерывна на σ.

В случае 1) $\Phi(\eta) > 0$ на σ. В силу того, что σ — замкнутое ограниченное множество и $\Phi(\eta)$ непрерывна на нем, существует минимум $\min \Phi(\eta) = m > 0$, $\eta \in \sigma$.

Далее, так как $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, то существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $\rho < \delta$ $|\varepsilon| < m/2$. На основании (3) тогда для указанных $\rho > 0$ $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) > \rho^2\left(m - \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2}\rho^2 > 0$, т. е. в точке $\mathbf{x}^0$ функция f достигает локального минимума.

Утверждение 2) доказывается аналогично. Если форма строго определенна отрицательно, то функция $\Phi(\eta) < 0$ на σ, следовательно она достигает своего (отрицательного) максимума на σ, который мы обозначим через $-M$ $(M > 0)$. Но для достаточно малого $\delta > 0$, если $\rho < \delta$, то $|\varepsilon| < M/2$, поэтому для $0 < \rho < \delta$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) < \rho^2\left(-M + \frac{M}{2}\right) = -\frac{M}{2}\rho^2 < 0,$$

т. е. f имеет в $\mathbf{x}^0$ локальный максимум.

В случае 3) наша форма для некоторой точки $\boldsymbol{\xi}' \neq 0$ обращается в нуль, но тогда в силу однородных свойств формы для любой точки вида $\mathbf{x}' = \alpha\boldsymbol{\xi}'$, где α — любое число, она также должна равняться нулю. Это показывает, что для всех указанных точек $\mathbf{x}'$ наша форма равна нулю и, следовательно, $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}') - f(\mathbf{x}^0) = \varepsilon\rho^2$. Но знак ε неизвестен, поэтому мы не можем сказать, имеет f в $\mathbf{x}^0$ экстремум или нет.

Единственное, что можно сказать при этих условиях, что если форма тождественно не равна нулю и положительно (не строго) определенна, то в $\mathbf{x}^0$ не может быть максимума, или, если она тождественно не равна нулю и отрицательно (не строго) определенна, то в $\mathbf{x}^0$ не может быть минимума.

В случае 4) опять удобно обратиться к равенству (3). В этом случае, по условию, существует точка $\boldsymbol{\xi}'$, для которой форма положительна, и точка $\boldsymbol{\xi}''$, для которой форма отрицательна, но тогда для соответствующих им точек η', η'' будут выполняться неравенства $\Phi(\eta') > 0$, $\Phi(\eta'') < 0$ и при малых ρ окажется, что $\Phi(\eta') + \varepsilon > 0$, $\Phi(\eta'') + \varepsilon < 0$, т. е. в любой малой окрестности $\mathbf{x}^0$ имеются точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, для которых $f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{x}^0)$ и $f(\mathbf{x}'') < f(\mathbf{x}^0)$, а это означает, что в $\mathbf{x}^0$ заведомо нет экстремума.

Составим ряд главных миноров квадратической формы $A(\xi)$:

$$\Delta_1 = a_1;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ \ldots;\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме Сильвестра из теории квадратических форм

1) если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$, то форма строго положительно определенна (случай 1);

2) если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ..., $(-1)^n\Delta_n > 0$, то форма строго отрицательно определенна (случай 2);

3) Если $\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0$, ..., $\Delta_n \geqslant 0$ или $\Delta_1 \leqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0$, ..., $(-1)^n\Delta_n \geqslant 0$ и имеется j, при котором $\Delta_j = 0$, то форма заведомо не строго определенна (случай 3);

4) во всех остальных случаях форма неопределенна (случай 4).

В двумерном случае равенство (2) выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = {}^1/_2\left(A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2\right) + \varepsilon\rho^2,$$
$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0, \quad B = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0, \quad C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0,$$

и соответствующий сильвестров ряд состоит из двух членов:

$$\Delta_1 = A, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Следовательно,

a) если $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$, то f имеет в $\mathbf{x}^0$ минимум;

b) если $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$, то максимум;

c) если $AC - B^2 < 0$, то нет экстремума;

d) если $AC - B^2 = 0$, то неизвестно, есть ли экстремум.

Впрочем, эти факты легко получить непосредственно из представления ($\boldsymbol{\zeta} = (\xi, \eta) \neq 0$)

$$\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 = \frac{(A\xi + B\eta)^2 + (AC - B^2)\eta^2}{A} \quad (A \neq 0).$$

В случае a), если $|\eta| > 0$, то $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) > 0$, а если $\eta = 0$, то должно быть $\xi \neq 0$ и тогда снова $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) > 0$.

В случае b), если $|\eta| > 0$, то $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) < 0$, а если $\eta = 0$, то должно быть $\xi \neq 0$ и тогда $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) < 0$.

В случае c) и $A \neq 0$ можно, с одной стороны, подобрать (ξ, η) так, что $\eta \neq 0$ и $(A\xi + B\eta) = 0$, а с другой, положить $\eta = 0$ и $\xi > 0$. В обоих случаях будет $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) \neq 0$, но разных знаков. Если же $A = 0$, но $C \neq 0$, то приходим к тем же фактам, заменяя A на C.

В случае d), при $A \neq 0$ $\Lambda(\zeta) = (A\xi + B\eta)^2/A$, и можно указать не нулевую точку $\zeta = (\xi, \eta)$ такую, что $A(\zeta) = 0$. Тот же факт получим при $C \neq 0$, заменяя A на C. Наконец, если $A = C = 0$, то форма $A(\zeta) = B\xi\eta$, очевидно, неопределенна.

Пример 1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$. Уравнения $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ дают два решения: $x = y = 3$ (минимум), $x = y = 0$ (нет экстремума).

Пример 2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1$. Три решения: $x = +\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ (минимум); $x = -\sqrt{2}$, $y = +\sqrt{2}$ (минимум); $x = y = 0$ (случай d, но на самом деле нет экстремума).

Пример 3. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$. Решение $x = y = 0$ (сомнительный случай). С другой стороны, очевидно, $f(x, y) = (x - y^2)^2 - y^5$, и так как при любом $\varepsilon > 0$ $f(\varepsilon^2, \varepsilon) = -\varepsilon^5 < 0$, $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$, то экстремума в точке $(0, 0)$ нет. Однако при любых h, k $(h^2 + k^2 > 0)$ функция $y(t) = f(ht, kt)$ имеет минимум при $t = 0$!

§ 7.16. Теоремы существования неявной функции

Зададим произвольную функцию $f(x, y)$ от двух переменных x, y. Приравняем ее нулю:

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Множество всех точек (x, y), для которых выполняется равенство (1), обозначим через $\mathfrak{M}$. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}$, т. е. $f(x_0, y_0) = 0$.

Если не накладывать никаких условий на f, то множество $\mathfrak{M}$ может иметь самую различную природу. Например, в случае $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из одной-единственной точки (x_0, y_0); в случае

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = (x + y - x_0 - y_0)(x - y - x_0 + y_0)$$

$\mathfrak{M}$ есть пара прямых, проходящих через (x_0, y_0). Однако часто имеют место случаи, когда $\mathfrak{M}$, по крайней мере в достаточно малой окрестности (x_0, y_0), представляет собой кривую, описываемую непрерывной (однозначной) функцией

$$y = \psi(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Возникает вопрос, как по свойствам функции f узнать, что имеет место именно этот случай?

Ниже доказываются две общие теоремы, отвечающие на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Пусть задано уравнение*

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим свойствам.

Функция f определена на некоторой двумерной окрестности Ω точки (x^0, y^0) плоскости (x, y) и непрерывна там вместе со