В случае d), при $A \neq 0$ $\Lambda(\zeta) = (A\xi + B\eta)^2/A$, и можно указать не нулевую точку $\zeta = (\xi, \eta)$ такую, что $A(\zeta) = 0$. Тот же факт получим при $C \neq 0$, заменяя A на C. Наконец, если $A = C = 0$, то форма $A(\zeta) = B\xi\eta$, очевидно, неопределенна.

Пример 1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$. Уравнения $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ дают два решения: $x = y = 3$ (минимум), $x = y = 0$ (нет экстремума).

Пример 2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1$. Три решения: $x = +\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ (минимум); $x = -\sqrt{2}$, $y = +\sqrt{2}$ (минимум); $x = y = 0$ (случай d, но на самом деле нет экстремума).

Пример 3. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$. Решение $x = y = 0$ (сомнительный случай). С другой стороны, очевидно, $f(x, y) = (x - y^2)^2 - y^5$, и так как при любом $\varepsilon > 0$ $f(\varepsilon^2, \varepsilon) = -\varepsilon^5 < 0$, $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$, то экстремума в точке $(0, 0)$ нет. Однако при любых h, k $(h^2 + k^2 > 0)$ функция $y(t) = f(ht, kt)$ имеет минимум при $t = 0$!

§ 7.16. Теоремы существования неявной функции

Зададим произвольную функцию $f(x, y)$ от двух переменных x, y. Приравняем ее нулю:

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Множество всех точек (x, y), для которых выполняется равенство (1), обозначим через $\mathfrak{M}$. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}$, т. е. $f(x_0, y_0) = 0$.

Если не накладывать никаких условий на f, то множество $\mathfrak{M}$ может иметь самую различную природу. Например, в случае $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из одной-единственной точки (x_0, y_0); в случае

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = (x + y - x_0 - y_0)(x - y - x_0 + y_0)$$

$\mathfrak{M}$ есть пара прямых, проходящих через (x_0, y_0). Однако часто имеют место случаи, когда $\mathfrak{M}$, по крайней мере в достаточно малой окрестности (x_0, y_0), представляет собой кривую, описываемую непрерывной (однозначной) функцией

$$y = \psi(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Возникает вопрос, как по свойствам функции f узнать, что имеет место именно этот случай?

Ниже доказываются две общие теоремы, отвечающие на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Пусть задано уравнение*

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим свойствам.

Функция f определена на некоторой двумерной окрестности Ω точки (x^0, y^0) плоскости (x, y) и непрерывна там вместе со *своими частными производными (первого порядка); при этом*)*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \tag{2}$$

и $f(x^0, y^0) = 0$.

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ *есть множество всех точек* (x, y), *удовлетворяющих уравнению* (1) *(в частности,* $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M}$*).*

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, *найдется прямоугольник*

$$\Delta = \{|x - x^0| < a, \ |y - y^0| < b\}, \quad b < b_0, \tag{3}$$

принадлежащий Ω, *такой, что множество* $\mathfrak{M}\Delta$ *описывается непрерывно дифференцируемой функцией*

$$y = \psi(x); \quad x \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x - x_0| < a\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на ось x можно определить непрерывно дифференцируемую функцию (4), удовлетворяющую уравнению (1):

$$f(x, \psi(x)) \equiv 0, \ x \in \Delta^0.$$

График ее полностью принадлежит Δ. Эта функция единственна в том смысле, что любая точка $(x, y) \in \mathfrak{M}\Delta$ имеет координаты, связанные уравнением (4). В частности, $y^0 = \psi(x^0)$, потому что $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M}\Delta$.

Теорема 1′. *Пусть задано уравнение*

$$f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{1′}$$

удовлетворяющее следующим условиям.

Функция f *определена на некоторой окрестности* Ω *точки* $(\mathbf{x}^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ *пространства* R_{n+1} *точек* $(\mathbf{x}, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ *и непрерывна там вместе со своими частными производными (первого порядка); при этом*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0, \quad f(\mathbf{x}^0, y^0) = 0. \tag{2′}$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ *есть множество всех точек* $(\mathbf{x}, y)$, *удовлетворяющих уравнению* (1′) *(в частности,* $(\mathbf{x}^0, y^0) \in \mathfrak{M}$*).*

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$ *найдется в* Ω *прямоугольник*

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < a, \ j = 1, \ldots, n, \ |y - y^0| < b\}, \quad b < b_0, \tag{3′}$$

принадлежащий Ω, *такой, что множество* $\mathfrak{M}\Delta$ *описывается непрерывно дифференцируемой функцией (т. е. имеющей непрерывные*

---

*) Достаточно предполагать, что $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = f'_y(x^0, y^0) \neq 0$. Отсюда в силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ следует выполнение условия (2) на некоторой окрестности точки (x^0, y^0).

частные производные)

$$y = \psi(\mathbf{x}) = \psi(x_1, \ldots, x_n), \ \mathbf{x} \in \Delta^0, \tag{4'}$$

$$\Delta^0 = \{|x_j - x_j^0| < a, \ j = 1, \ldots, n\}. \tag{5'}$$

Доказательство теоремы 1. Так как $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на области Ω, то из (2), следует, что $\frac{\partial f}{\partial y}$ имеет один и тот же знак всюду на Ω. Для определенности пусть $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ на Ω.

Введем замкнутый прямоугольник

$$\overline{\Delta} = \{|x - x^0| \leqslant \bar{a}, \ |y - y^0| \leqslant b\}, \qquad b < b_0, \tag{6}$$

принадлежащий Ω ($\overline{\Delta} \subset \Omega$). Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{\Delta}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, то для некоторых положительных констант m_1 и m_2

$$\frac{\partial f}{\partial y} > m_1 > 0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant m_2. \tag{7}$$

Функция $f(x^0, y)$ от переменной y строго возрастает на отрезке $[y^0 - b, \ y^0 + b]$, потому что $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ на $\overline{\Delta}$, и, так как $f(x^0, y^0) = 0$, то $f(x^0, y^0 - b) < 0$, $f(x^0, y^0 + b) > 0$. Вследствие непрерывности f на $\overline{\Delta}$, найдется положительное число $a < \bar{a}$ такое, что $f(x, y^0 - b) < 0$, $f(x, y^0) > 0$, $x \in \Delta^0$ (см. (5)).

Рассмотрим теперь для произвольной фиксированной точки $x \in \Delta^0$ функцию $f(x, y)$ от y на отрезке $[y^0 - b, \ y^0 + b)$. В силу свойств f она непрерывна, строго возрастает $\left(\frac{\partial f}{\partial y} > 0\right)$ и имеет противоположные знаки на его концах. Но тогда существует, и притом единственное, $y \in (y^0 - b, \ y^0 + b)$, мы его обозначим через $\psi(x)$, для которого $f(x, \psi(x)) = 0$.

Этим доказано существование определенной на Δ^0 функции $\psi(x)$, удовлетворяющей требованиям теоремы, если не считать, что пока не доказана ее непрерывная дифференцируемость.

Пусть x, $x + \Delta x \in \Delta^0$, $y = \psi(x)$ и

$$\Delta y = \psi(x + \Delta x) - \psi(x).$$

Тогда, применяя формулу конечных приращений Лагранжа для функции двух переменных (см. § 7.13, (12)), получим

$$0 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= f'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\,\Delta y$$

или

$$\Delta y = -\frac{f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}\Delta x. \tag{8}$$

Учитывая, что $\Delta \subset \Delta$ (см. (7)), получим

$$|f'_x/f'_y| \leqslant m_2/m_1 \text{ на } \Delta, \tag{9}$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0, \tag{10}$$

что показывает, что функция $y=\psi(x)$ непрерывна на Δ^0.

Но теперь, деля (8) на Δx, мы можем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ и получить, что для любого $x\in\Delta^0$ существует производная

$$\psi'(x) = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{f'_x(x,\ \psi(x))}{f'_y(x,\ \psi(x))}. \tag{11}$$

Здесь надо учесть, что f'_x и f'_y непрерывны и $f'_y > 0$ на Δ.

Мы доказали не только существование производной $\psi'(x)$, но и важную формулу (11), с помощью которой можно вычислять $\psi'(x)$. Непрерывность $\psi'(x)$ непосредственно видна из этой формулы, потому что f'_x и f'_y непрерывны на прямоугольнике, а кривая $y=\psi(x)$, непрерывность которой уже установлена, не выходит за его пределы.

Доказательство теоремы $1'$ аналогично. Вместо x надо рассматривать $\mathbf{x}$ и считать, что $\mathfrak{M}$, Δ, Δ^0 определяются как в формулировке теоремы $1'$ и

$$\bar\Delta = \{|x_j - x_j^0| \leqslant a,\ |y-y^0| < b\} \subset \Omega, \qquad b < b^0.$$

Теперь уже имеют место неравенства

$$|f'_{x_j}| \leqslant m_2, \quad f'_y > m_1 \text{ на } \bar\Delta, \tag{7'}$$

и по аналогии доказывается существование и единственность функции

$$y=\psi(\mathbf{x}) = \psi(x_1,\ \ldots,\ x_n) \quad \mathbf{x}\in\Delta^0, \quad (\mathbf{x},\ \psi(\mathbf{x})) =$$
$$= (x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \psi(\mathbf{x})) \in \Delta, \tag{12}$$

удовлетворяющей уравнению $(1')$. Единственность понимается в том смысле, что любая точка $(\mathbf{x},\ y)\in\Delta$, удовлетворяющая уравнению $(1')$ имеет координаты, связанные между собой равенством (12).

Пусть теперь

$$\Delta y = \psi(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}),\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\in\Delta^0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Тогда согласно формуле конечных приращений Лагранжа для функции многих переменных (см. § 7.13, (12))

$$0 = f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}, y+\Delta y) - f(\mathbf{x}, y) = \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(\mathbf{x}+\theta\Delta\mathbf{x}, y + \\ + \theta\Delta y)\,\Delta x_j + f'_y(\mathbf{x}+\theta\Delta\mathbf{x}, y+\theta\Delta y)\,\Delta y, \qquad 0<\theta<1,$$

и, следовательно,

$$\Delta y = -\frac{1}{f'_y(\mathbf{x}+\theta\Delta\mathbf{x}, y+\theta\Delta y)} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}+\theta\Delta\mathbf{x}, y+\theta\Delta y)\,\Delta x_i \qquad (8')$$

и, в силу (7′),

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \Delta y = 0. \qquad (10')$$

Далее, считая, что $\Delta x_j \neq 0$, $\Delta x_i = 0$ при $j \neq i$, из (8′) получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_j} = -\frac{f_{x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j+\theta\Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, y+\theta\Delta y)}{f_y(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j+\theta\Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, y+\theta\Delta y)},$$

и после перехода к пределу при $\Delta x_j \to 0$, учитывая (10′) и что f_{x_i}, f_y непрерывны и $f_y > 0$, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))}{\partial y}} \quad (j = 1, \ldots, n). \qquad (11')$$

При этом $\dfrac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ непрерывны по $\mathbf{x}$, потому что правая часть (11′) непрерывна по $\mathbf{x}$.

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ [соответственно $f(\mathbf{x}, y)$] удовлетворяет условиям теоремы 1 (соответственно теоремы 1′) и, кроме того, имеет на Ω непрерывные частные производные порядка l, то и функция $\psi(x)$ [соответственно $\psi(\mathbf{x})$], о которой идет речь в теореме 1 (соответственно теореме 1′), имеет на Δ^0 непрерывные частные производные порядка l.*

Доказательство. Дифференцируя (11) по x, получим

$$\psi''(x) = -\frac{f'_y\left[f''_{xx} + \psi' f''_{xy}\right] - f'_x\left[f''_{yx} + \psi' f''_{yy}\right]}{f'^2_y}, \qquad (13)$$

где, конечно, всюду в частные производные надо вместо (x, y) подставить $(x, \psi(x))$. Правая часть этого равенства — непрерывная функция от x, следовательно, и $\psi''(x)$ непрерывна.

Продолжая дифференцирование, наконец, получим, что производная $\psi^{(l)}(x)$ есть рациональная функция частных производных от f до порядка l включительно и производных $\psi', \ldots, \psi^{(l-1)}$, непрерывность которых установлена на предыдущем этапе дифференцирования. При этом знаменатель дроби, равной этой рациональной функции (в силу условия $f'_y \neq 0$), не равен нулю.

В случае теоремы 1' равенству (13) будут соответствовать следующие [см. (11')]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{f'_y\left[f''_{x_ix_j} + \psi'_{x_i}f''_{yx_j}\right] - f'_{x_j}\left[f''_{x_iy} + \psi'_{x_i}f''_{yy}\right]}{f'^2_y} \quad (i,\ j = 1, \ldots, n).$$

Пример. Левая часть уравнения $(y-x)^2 = 0$ имеет непрерывные частные производные, но производная по y при $x = y = 0$ равна нулю. Это не мешает тому, что данное уравнение имеет единственное решение ($y = x$), равное нулю при $x = 0$. Таким образом, теорема 1 дает только достаточные условия для существования единственной неявной функции, график которой проходит через заданную точку (x^0, y^0), но не необходимые.

§ 7.17. Теорема существования решения системы уравнений

Теорема 1. *Пусть задана система уравнений*

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

удовлетворяющая следующим свойствам.

*Функции f_j определены на некоторой ($(n+m)$-мерной) окрестности Ω точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ пространства R_{n+m} точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и непрерывны там вместе со своими частными производными (первого порядка) с якобианом (определителем Якоби *))*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \neq 0. \tag{2}$$

Кроме того, точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ удовлетворяет системе (1).

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющих системе (1) (в частности, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, найдется прямоугольник

$$\Delta = \{|x_i - x_i^0| < a, \quad i = 1, \ldots, n, \ |y_j - y_j^0| < b, \quad j = 1, \ldots, m\},$$
$$b < b_0, \tag{3}$$

принадлежащий Ω такой, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y_j = \psi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \ldots, m, \ \mathbf{x} \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x_i - x_i^0| < a; \quad i = 1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на координатное подпространство

*) К. Г. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.