ных от f до порядка l включительно и производных $\psi', \ldots, \psi^{(l-1)}$, непрерывность которых установлена на предыдущем этапе дифференцирования. При этом знаменатель дроби, равной этой рациональной функции (в силу условия $f'_y \neq 0$), не равен нулю.

В случае теоремы 1' равенству (13) будут соответствовать следующие [см. (11')]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{f'_y\left[f''_{x_i x_j} + \psi'_{x_i} f''_{y x_j}\right] - f'_{x_j}\left[f''_{x_i y} + \psi'_{x_i} f''_{yy}\right]}{f'^2_y} \quad (i,\ j = 1, \ldots, n).$$

Пример. Левая часть уравнения $(y-x)^2 = 0$ имеет непрерывные частные производные, но производная по y при $x = y = 0$ равна нулю. Это не мешает тому, что данное уравнение имеет единственное решение ($y = x$), равное нулю при $x = 0$. Таким образом, теорема 1 дает только достаточные условия для существования единственной неявной функции, график которой проходит через заданную точку (x^0, y^0), но не необходимые.

§ 7.17. Теорема существования решения системы уравнений

Теорема 1. *Пусть задана система уравнений*

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

удовлетворяющая следующим свойствам.

*Функции f_j определены на некоторой ($(n+m)$-мерной) окрестности Ω точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ пространства R_{n+m} точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и непрерывны там вместе со своими частными производными (первого порядка) с якобианом (определителем Якоби *))*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \neq 0. \tag{2}$$

Кроме того, точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ удовлетворяет системе (1).

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющих системе (1) (в частности, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, найдется прямоугольник

$$\Delta = \{|x_i - x_i^0| < a, \quad i = 1, \ldots, n, \ |y_j - y_j^0| < b, \quad j = 1, \ldots, m\},$$
$$b < b_0, \tag{3}$$

принадлежащий Ω такой, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y_j = \psi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \ldots, m, \ \mathbf{x} \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x_i - x_i^0| < a; \quad i = 1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на координатное подпространство

*) К. Г. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

$(x_1, \ldots, x_n)$ можно определить непрерывно дифференцируемые функции (4), удовлетворяющие уравнениям (1):

$$f_j(\mathbf{x}, \psi_1, (\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})) \equiv 0, \ \mathbf{x} \in \Delta^0, \ j = 1, \ldots, m \tag{6}$$

и неравенствам $|\psi_j(\mathbf{x}) - y_j^0| < b$. Эти функции единственны в том смысле, что любая точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{M}\Delta$ имеет координаты, связанные уравнениями (4).

В частности, $y_j^0 = \psi_j(\mathbf{x}^0)$, $j = 1, \ldots, m$, потому, что $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \in \mathfrak{M}\Delta$.

Замечание 1. Можно также пользоваться такой формулировкой, которая будет удобна ниже: а) точки вида

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0 \tag{7}$$

принадлежат Δ и удовлетворяют уравнениям (1) (т. е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \in \mathfrak{M}\Delta$); других точек, удовлетворяющих уравнениям (1), в Δ нет, т. е. если точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{M}\Delta$, то она имеет вид (7) при некотором $\mathbf{x} \in \Delta^0$.

Замечание 2. В теореме можно считать, что прямоугольник Δ и его проекция Δ^0 определяются неравенствами

$$\Delta = \{|x_i - x_i^0| < a_i, \ i = 1, \ldots, n; \ |y_j - y_j^0| < b_j, \ j = 1, \ldots, m\}, \tag{3'}$$

$$\Delta^0 = \{|x_i - x_i^0| < a_i, \ i = 1, \ldots, n\}, \tag{5'}$$

с различными, вообще говоря, числами a_i, b_j. Ведь если теорема верна для прямоугольника (3′) при некоторых a_i, b_j, то, положив $b = \min b_j$, можно вследствие непрерывности функций ψ_i указать такое число $a < a_i$, $i = 1, \ldots, n$, что точки $(\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x}))$ с $\mathbf{x} \in \{|x_i - x_i^0| < a, \ i = 1, \ldots, n\}$ окажутся в прямоугольнике (3).

Если теперь точка (x, y), удовлетворяющая уравнениям (1), принадлежит прямоугольнику (3), то она принадлежит и прямоугольнику (3′), и, так как для последнего теорема верна, то x связано с y соотношениями (4).

Заметим, однако, что вообще невозможно добиться, чтобы a и b в (3) были равными, в чем легко убедиться на примере одного уравнения

$$F(x, y) = y - 2x = 0, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Доказательство. При $m = 1$ теорема уже доказана (см. § 7.16, теорема 1′). Пусть она верна при $m - 1$ $(m > 1)$; докажем ее верность при m.

Так как якобиан (2) не равен нулю в точке $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, то один из его миноров порядка $m - 1$ тоже не равен нулю в этой точке, а вследствие его непрерывности, и в некоторой достаточно малой окрестности этой точки, которую мы будем считать совпадающей с Ω, уменьшив в случае необходимости прежнюю окрестность Ω. Не нарушая общности, будем считать, что это есть минор

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_{m-1})}{D(y_1, \ldots, y_{m-1})} \neq 0. \tag{8}$$

Но, по предположению, теорема верна для $m-1$, поэтому, учитывая (8), ее можно применить к первым $m-1$ уравнениям (1) и заключить, что для любого $b_0 > 0$ существует в R_{n+m} принадлежащий Ω прямоугольник

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < \alpha,\ j = 1, \ldots, n,\ |y_m - y_m^0| < \beta,\ |y_i - y_i^0| < \gamma,$$
$$i = 1, \ldots, m-1\},\ \gamma < b_0 \tag{9}$$

такой, что множество $\mathfrak{M}'$ точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ из Δ, удовлетворяющих первым $m-1$ уравнениям (1), описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\begin{aligned} &y_j = \varphi_j(\mathbf{x}, y_m), && j = 1, \ldots, m-1,\ (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta', \\ &\Delta' = \{|x_i - x_i^0| < \alpha, && i = 1, \ldots, n,\ |y_m - y_m^0| < \beta\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, в частности,

$$y_j^0 = \varphi_j(\mathbf{x}^0, y_m^0), \qquad j = 1, \ldots, m-1. \tag{11}$$

Замечание 3. Мы могли бы на этом первом этапе рассуждений взять $\alpha = \beta$, но на втором этапе, возможно, придется числа α, β непропорционально уменьшить. Легко убедиться в том, что это уменьшение не нарушит уже доказанное.

Итак, выполняются следующие свойства:

а) Точки ($(n+m)$-мерные)

$$(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) \in \Delta, \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'$$

и удовлетворяют первым $(m-1)$ уравнениям системы (1), т. е. выполняются тождества

$$\begin{gathered} f_i(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) \equiv 0, \\ (i = 1, \ldots, m-1), \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'. \end{gathered} \tag{12}$$

б) Имеет место единственность: если какая-либо точка

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in \Delta$$

и удовлетворяет первым $(m-1)$ уравнениям системы (1), то для координат этой точки автоматически справедливы соотношения:

$$(\mathbf{x},\ y_m) \in \Delta', \quad x_i = \varphi_i(\mathbf{x},\ y_m) \quad (i = 1, \ldots, m-1). \tag{13}$$

Допустим, что нам удалось подобрать непрерывно дифференцируемую функцию $\lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Delta^0$, где $\Delta^0 = \{|x_i - x_i^0| < \alpha,\ i = 1, \ldots, n\}$, такую, что точки ($(n+1)$-мерные)

$$(\mathbf{x},\ \lambda(\mathbf{x})) = (x_1, \ldots, x_n,\ \lambda(\mathbf{x})) \in \Delta', \quad \mathbf{x} \in \Delta^0. \tag{14}$$

Тогда функции $\varphi_i(\mathbf{x},\ \lambda(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Delta^0$ будут непрерывно дифференцируемыми на Δ^0, и будут очевидно удовлетворяться тождества:

$$\begin{gathered} f_i(\mathbf{x},\ \varphi_1(\mathbf{x},\ \lambda(\mathbf{x})), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x},\ \lambda(\mathbf{x})),\ \lambda(\mathbf{x})) \equiv 0, \\ i = 1, \ldots, m-1, \quad \mathbf{x} \in \Delta^0. \end{gathered} \tag{15}$$

Существует бесконечное множество непрерывно дифференцируемых функций λ, которые подчиняются условию (14). Естественно попытаться среди них выбрать такую, чтобы для нее наряду с (15) выполнялось бы также тождество

$$f_m(\mathbf{x},\ \varphi_1(\mathbf{x},\ \lambda(\mathbf{x})), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x},\ \lambda(\mathbf{x})),\ \lambda(\mathbf{x})) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in \Delta^0. \tag{16}$$

Тогда, если положить

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x},\ \lambda(\mathbf{x})), \quad \psi_m(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}), \quad i = 1, \ldots, m-1, \quad \mathbf{x} \in \Delta^0, \tag{17}$$

то получим m непрерывно дифференцируемых функций

$$y_i = \psi_i(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Delta^0,\ y_i^0 = \psi_i(\mathbf{x}^0), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{18}$$

удовлетворяющих системе (1).

Но это только план. Надо его осуществить.

Рассмотрим уравнение

$$F(\mathbf{x},\ y_m) = f_m(\mathbf{x},\ \varphi_1(\mathbf{x},\ y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x},\ y_m),\ y_m) = 0 \tag{19}$$

и отметим следующие три свойства функции $F(\mathbf{x},\ y_m)$:

1) Функция $F(\mathbf{x},\ y_m)$ определена на прямоугольнике Δ' и имеет там непрерывные частные производные, потому что этим свойством обладают функции (10), которые к тому же не выходят за пределы прямоугольника Δ точек $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$, где $f_m(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ непрерывно дифференцируема.

2) $F(\mathbf{x}^0,\ y_m^0) = f_m(\mathbf{x}^0,\ \varphi_1(\mathbf{x}^0,\ y_m^0), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}^0,\ y_m^0),\ y_m^0) =$
$= f_m(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{y}^0) = 0.$

3) Частная производная

$$\frac{\partial F}{\partial y_m} \neq 0$$

на Δ'.

Свойство 3) вытекает из следующих рассуждений. Дифференцируя (на Δ') функции (12) и (16) по y_m, получим

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}+\ldots+\frac{\partial f_j}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial f_j}{\partial y_m}\equiv 0, \quad j=1,\ldots,m-1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_m}=\frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}+\ldots+\frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

Поэтому, если прибавить к m-му столбцу определителя (2) i-е его столбцы, умноженные на $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_m}$, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

откуда, учитывая (8), $\frac{\partial F}{\partial y_m} \neq 0$.

Наша теорема при $m=1$ есть теорема 1′ § 7.16. Применим ее к функции $F(\mathbf{x}, y_m)$, заданной на области

$$\Delta' = \{|x_i - x_i^0| < \alpha, \quad i=1,\ldots,n; \quad |y_m - y_m^0| < \beta\}.$$

Условиями этой теоремы являются уже проверенные нами условия 1)—3). В силу этой теоремы, если уменьшить уже найденное $\beta > 0$, то для него можно подобрать $\alpha > 0$, вообще говоря, меньшее уже найденного α, так, что для полученного уменьшенного прямоугольника *) (мы его снова обозначаем через Δ') будут выполняться следующие утверждения в), г):

в) Существует на

$$\Delta^0 = \{|\mathbf{x} - x_i| < \alpha, \quad i=1,\ldots,n\}$$

непрерывно дифференцируемая функция

$$y_m = \lambda(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \Delta^0,\ y_m^0 = \lambda(\mathbf{x}^0)) \tag{19}$$

такая, что точки ($(n+1)$-мерного пространства) $(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) \in \Delta'$ $(\mathbf{x} \in \Delta^0)$ удовлетворяют уравнению $F(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) \equiv 0$.

---

*) Утверждения а), б) сохраняются и для уменьшенного прямоугольника Δ'. Таким образом, мы считаем отныне, что уменьшенный прямоугольник Δ' фигурирует как в уже доказанных утверждениях а), б), так и в утверждениях в), г), которые формулируются ниже.

г) Если точка $(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'$ удовлетворяет уравнению $F(\mathbf{x}, y_m) = 0$, то необходимо: $\mathbf{x} \in \Delta^0$ и $y_m = \lambda(\mathbf{x})$.

Положим (см. (17))

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) \quad (i = 1, \ldots, m-1), \ \psi_m(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0.$$

Тогда получим систему непрерывно дифференцируемых функций

$$y = \psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0, \quad y_i^0 = \psi_i(\mathbf{x}^0) \quad (i = 1, \ldots, m-1)$$

таких, что точки

$$(\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_i(\mathbf{x})) \in \Delta \quad (\mathbf{x} \in \Delta^0)$$

удовлетворяют всем уравнениям (1). Остается доказать единственность.

Пусть точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta$ и удовлетворяет уравнениям системы (1). В частности, она удовлетворяет первым $(m-1)$ уравнениям системы (1) и потому на основании б)

$$(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta', \ y_i = \varphi_i(\mathbf{x}, y_m) \quad (i = 1, \ldots, m-1). \tag{20}$$

В силу этого и в силу того, что точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет и m-му уравнению системы (1),

$$f_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) = 0,$$

иначе говоря,

$$F(\mathbf{x}, y_m) = 0, \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'.$$

Но тогда в силу г) имеет место связь $y_m = \lambda(\mathbf{x}) = \psi_m(\mathbf{x})$ и необходимо $\mathbf{x} \in \Delta^0$ и в силу (20) тоже необходимо

$$y_i = \varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) = \psi_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, \ldots, m-1).$$

Теорема доказана полностью, но только для прямоугольника Δ, имеющего вид (9). Переход к прямоугольнику вида (3) можно осуществить, учтя замечание 2.

Теорема 2. *Если к условиям теоремы* 1 *добавить, что функции f_j непрерывно дифференцируемы l раз на Ω, то функции $\psi_j(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Delta^0$, $j = 1, \ldots, m$, решающие системы, непрерывно дифференцируемы l раз на Δ.*

Теорема доказывается аналогично теореме 2 § 7.16.

§ 7.18. Отображения

Пусть задана система непрерывно дифференцируемых функций

$$y_j = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где Ω — открытое множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Будем говорить, что система (1) определяет *непрерывно дифференцируемое отображение*

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1'}$$