г) Если точка $(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'$ удовлетворяет уравнению $F(\mathbf{x}, y_m) = 0$, то необходимо: $\mathbf{x} \in \Delta^0$ и $y_m = \lambda(\mathbf{x})$.

Положим (см. (17))

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) \quad (i = 1, \ldots, m-1), \; \psi_m(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0.$$

Тогда получим систему непрерывно дифференцируемых функций

$$y = \psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0, \quad y_i^0 = \psi_i(\mathbf{x}^0) \quad (i = 1, \ldots, m-1)$$

таких, что точки

$$(\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_i(\mathbf{x})) \in \Delta \quad (\mathbf{x} \in \Delta^0)$$

удовлетворяют всем уравнениям (1). Остается доказать единственность.

Пусть точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta$ и удовлетворяет уравнениям системы (1). В частности, она удовлетворяет первым $(m-1)$ уравнениям системы (1) и потому на основании б)

$$(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta', \; y_i = \varphi_i(\mathbf{x}, y_m) \quad (i = 1, \ldots, m-1). \tag{20}$$

В силу этого и в силу того, что точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет и m-му уравнению системы (1),

$$f_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) = 0,$$

иначе говоря,

$$F(\mathbf{x}, y_m) = 0, \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'.$$

Но тогда в силу г) имеет место связь $y_m = \lambda(\mathbf{x}) = \psi_m(\mathbf{x})$ и необходимо $\mathbf{x} \in \Delta^0$ и в силу (20) тоже необходимо

$$y_i = \varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) = \psi_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, \ldots, m-1).$$

Теорема доказана полностью, но только для прямоугольника Δ, имеющего вид (9). Переход к прямоугольнику вида (3) можно осуществить, учтя замечание 2.

Теорема 2. *Если к условиям теоремы* 1 *добавить, что функции* f_j *непрерывно дифференцируемы* l *раз на* Ω, *то функции* $\psi_j(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Delta^0$, $j = 1, \ldots, m$, *решающие системы, непрерывно дифференцируемы* l *раз на* Δ.

Теорема доказывается аналогично теореме 2 § 7.16.

§ 7.18. Отображения

Пусть задана система непрерывно дифференцируемых функций

$$y_j = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где Ω — открытое множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Будем говорить, что система (1) определяет *непрерывно дифференцируемое отображение*

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1'}$$

множества Ω на некоторое множество Ω' точек $y=(y_1, \ldots, y_m)$. Будем еще писать $\Omega'=A(\Omega)$, и называть Ω' *образом* Ω, а Ω — *прообразом* Ω' (посредством отображения A).

Наряду с A рассмотрим другое непрерывно дифференцируемое отображение, B:

$$z_j=\psi_j(\mathbf{y})=\psi_j(y_1, \ldots, y_m), \qquad \mathbf{y}\in\Lambda,\ j=1, 2, \ldots, m$$

открытого множества Λ точек $\mathbf{y}$ на некоторое множество точек $z=(z_1, \ldots, z_m)$. Таким образом, $\mathbf{z}=B\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\in\Lambda$.

Если *) $\Omega'\subset\Lambda$, то имеет смысл сложное непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{z}=BA\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\Omega$, определяемое равенствами $z_j=\psi_j(\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x}\in\Omega$ $(j=1, \ldots, m)$.

Якобианы отображений A, B, BA связаны замечательными равенствами

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}=\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right|=\left|\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right|=$$

$$=\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\right|\left|\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right|=\frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad (2)$$

доказательство которых, как мы видим, основано на применении формулы производной от сложной функции и правила умножения определителей.

В частности, если B обращает A на множестве точек $\mathbf{x}\in\Omega$, т. е. $\mathbf{x}=BA\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\Omega$ есть тождественное отображение, то в силу того, что его якобиан равен 1, получим формулу

$$1=\frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \quad \mathbf{x}\in\Omega. \qquad (3)$$

Будем теперь считать, что определяемое равенствами (1) непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ имеет якобиан **) $\dfrac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\neq 0$, $\mathbf{x}\in\Omega$, не равный нулю всюду на открытом множестве Ω. Имеют место следующие свойства:

1) $\Omega'=A(\Omega)$ — открытое множество (вместе с Ω!),

2) если Ω — область, то и Ω' — область,

3) отображение A локально взаимно однозначно, т. е. какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0\in\Omega$, найдется шар $V\in\Omega$ с центром в ней, такой, что отображение A, рассматриваемое только на V, взаимно однозначно.

---

*) Отметим, что если $\mathbf{x}^0\in\Omega$ и $\mathbf{y}^0=A\mathbf{x}^0\in\Lambda$, то в силу непрерывности A найдется окрестность $V_{\mathbf{x}^0}$ точки $\mathbf{x}^0$, образ которой посредством A принадлежит к Λ. Уменьшая Ω, положив $\Omega=V_{\mathbf{x}^0}$, получим тогда, что $\Omega'\subset\Lambda$.

**) Случай, когда якобиан отображения (1) равен нулю, изучается в § 7.27.

Пусть $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ и $\mathbf{y}^0 = A\mathbf{x}^0 \in \Omega'$. Введем пространство R_{2m} точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ и в нем рассмотрим уравнения

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m) - y_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ удовлетворяет этим уравнениям и в ее некоторой окрестности (в R_{2m}) функции f_i непрерывно дифференцируемы и имеют якобиан

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0.$$

Поэтому в силу теоремы 1 предыдущего параграфа для любого $b_0 > 0$ найдутся положительные a и $b < b_0$ такие, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ всех точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, принадлежащих прямоугольнику

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2,$$

$$\Delta_1 = \{|y_j - y_j^0| < a, \quad j = 1, \ldots, m\},$$

$$\Delta_2 = \{|x_j - x_j^0| < b, \quad j = 1, \ldots, m\} \subset \Omega$$

и удовлетворяющих уравнениям (1), описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_i = \psi_i(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y} \in \Delta_1 \ (i = 1, \ldots, m).$$

Поэтому $x \in \Delta_2$ при $\mathbf{y} \in \Delta_1$. Обозначим определяемое этими функциями непрерывно дифференцируемое отображение через $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$.

Сказанное можно выразить следующим образом:

а) если $\mathbf{y} \in \Delta_1$, то $\mathbf{x} = B\mathbf{y} \in \Delta_2$,

б) $\mathbf{y} = AB\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$,

в) из того, что $\mathbf{x} \in \Delta_2$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$ и $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, следует, что $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$.

Пусть $B(\Delta_1) = \omega$. В силу а) $\omega \subset \Delta_2 \subset \Omega$. В силу б) $A(\omega) = \Delta_1 \subset \Omega'$.

Таким образом, любая точка $\mathbf{y}^0 \in \Omega'$ содержится в некотором открытом кубе $\Delta_1 \subset \Omega'$ и, следовательно, есть внутренняя точка Ω'. Мы доказали свойство 1): Ω' открытое множество.

В силу б) якобиан перехода от $\mathbf{y}$ к $\mathbf{x}$ посредством B не равен нулю [см. (3)] на открытом множестве Δ_1. Но тогда в силу уже доказанного свойства 1), которое надо применить вместо A, Ω соответственно к B, Δ_1, множество ω точек x открыто.

Итак, операция A отображает открытое множество ω на $\Delta_1 = \omega'$.

Пусть $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ — точки ω, для которых $A\mathbf{x}' = A\mathbf{x}'' = \mathbf{y}$. Тогда $\mathbf{x}' \in \omega \subset \Delta_2$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$ и в силу в) $\mathbf{x}' = By$. Рассуждая аналогично, получим также $\mathbf{x}'' = By$, т. е. $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$. В частности, доказано

г) $BA\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \omega$.

Это показывает, что A отображает открытое множество ω на Δ_1 взаимно однозначно. В частности, A отображает любой шар $V \subset \omega$ с центром в $\mathbf{x}^0$ взаимно однозначно, что доказывает свойство 3).

Замечание. Свойства в) и г) выражают, что операции A и B взаимно обратны.

Пусть теперь Ω есть область; тогда по уже доказанному свойству 1) Ω' вместе с Ω открыто. Если теперь $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \Omega'$ — произвольные точки, то им соответствуют некоторые точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$ такие, что $A\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$, $A\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''$. Но Ω — связное множество, и найдется непрерывная кривая $\mathbf{x}(t) \in \Omega$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}''$, таким образом, принадлежащая Ω и соединяющая точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}$. Но тогда кривая $\mathbf{y}(t) = A[\mathbf{x}(t)]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ тоже, очевидно, непрерывна, принадлежит Ω' и соединяет $\mathbf{y}'$ с $\mathbf{y}''$. Следовательно, Ω' связно, т. е. область, и мы доказали свойство 2).

Свойство 3) утверждает только локальную взаимную однозначность, глобальной взаимной однозначности может и не быть. Например, преобразование $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ полярных координат точек плоскости в декартовы при $\rho > 0$ и произвольном θ непрерывно дифференцируемо и имеет положительный якобиан, равный ρ. Оно отображает точки (ρ, θ) $(\rho > 0, -\infty < \theta < \infty)$ плоскости (ρ, θ) в точки (x, y), отличные от нулевой точки, локально взаимно однозначно. Однако каждой такой точке (x, y) соответствует хотя и одно ρ, но бесконечное число различных значений θ, отличающихся между собой на $2k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 7.19. Гладкая поверхность

Пусть R есть трехмерное пространство, где определена прямоугольная система координат (x, y, z).

Если G — открытое множество в плоскости (x, y) и

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in G) \tag{1}$$

— функция, имеющая на G непрерывные частные производные (первого порядка), то множество $S \subset R$, описываемое этой функцией, называется *гладкой поверхностью*.

Про эту поверхность мы будем говорить, что она проектируется на плоскость $z = 0$. Равенство (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие $S \rightleftarrows G$ между точками $(x, y, z) \in S$ и точками $(x, y) \in G$.

Если G — ограниченная область (открытое связное множество) с границей γ, а частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ не только непрерывны, но и равномерно непрерывны на G, то в этом случае фукцию f и ее частные производные можно продолжить по непрерывности на γ. Мы будем говорить, что продолженная таким образом функция $z = f(x, y)$ $((x, y) \in \overline{G})$ описывает *гладкий кусок* $\overline{S}$. Множество $\Gamma = \overline{S} - S$ называется *краем* S (*или* $\overline{S}$). Его проекция на плоскость $z = 0$ есть, очевидно, множество γ.

Если γ — кусочно гладкая кривая (контур)

$$x = \varphi(s), \; y = \psi(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0),$$