Замечание. Свойства в) и г) выражают, что операции A и B взаимно обратны.

Пусть теперь Ω есть область; тогда по уже доказанному свойству 1) Ω' вместе с Ω открыто. Если теперь $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}'' \in \Omega'$ — произвольные точки, то им соответствуют некоторые точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in \Omega$ такие, что $A\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$, $A\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''$. Но Ω — связное множество, и найдется непрерывная кривая $\mathbf{x}(t) \in \Omega$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}''$, таким образом, принадлежащая Ω и соединяющая точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}$. Но тогда кривая $\mathbf{y}(t) = A[\mathbf{x}(t)]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ тоже, очевидно, непрерывна, принадлежит Ω' и соединяет $\mathbf{y}'$ с $\mathbf{y}''$. Следовательно, Ω' связно, т. е. область, и мы доказали свойство 2).

Свойство 3) утверждает только локальную взаимную однозначность, глобальной взаимной однозначности может и не быть. Например, преобразование $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ полярных координат точек плоскости в декартовы при $\rho > 0$ и произвольном θ непрерывно дифференцируемо и имеет положительный якобиан, равный ρ. Оно отображает точки (ρ, θ) $(\rho > 0, -\infty < \theta < \infty)$ плоскости (ρ, θ) в точки (x, y), отличные от нулевой точки, локально взаимно однозначно. Однако каждой такой точке (x, y) соответствует хотя и одно ρ, но бесконечное число различных значений θ, отличающихся между собой на $2k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 7.19. Гладкая поверхность

Пусть R есть трехмерное пространство, где определена прямоугольная система координат (x, y, z).

Если G — открытое множество в плоскости (x, y) и

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in G) \tag{1}$$

— функция, имеющая на G непрерывные частные производные (первого порядка), то множество $S \subset R$, описываемое этой функцией, называется *гладкой поверхностью*.

Про эту поверхность мы будем говорить, что она проектируется на плоскость $z = 0$. Равенство (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие $S \rightleftarrows G$ между точками $(x, y, z) \in S$ и точками $(x, y) \in G$.

Если G — ограниченная область (открытое связное множество) с границей γ, а частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не только непрерывны, но и равномерно непрерывны на G, то в этом случае фукцию f и ее частные производные можно продолжить по непрерывности на γ. Мы будем говорить, что продолженная таким образом функция $z = f(x, y)$ $((x, y) \in \overline{G})$ описывает *гладкий кусок* $\overline{S}$. Множество $\Gamma = \overline{S} - S$ называется *краем* S (*или* $\overline{S}$). Его проекция на плоскость $z = 0$ есть, очевидно, множество γ.

Если γ — кусочно гладкая кривая (контур)

$$x = \varphi(s), \ y = \psi(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0),$$

то Г есть в свою очередь кусочно гладкая кривая

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = f(\varphi(s), \psi(s)) \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0).$$

В этом случае $\bar{S}$ будем называть *элементарным гладким куском.*

Если $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ есть произвольная точка гладкой поверхности, описываемой уравнением (1), то в силу того, что G есть открытое множество, и в силу непрерывности f для любого $\delta_2 > 0$, можно указать такое $\delta_1 > 0$, что прямоугольник (прямоугольный параллелепипед)

$$\Delta = \{|x - x_0| \leqslant \delta_1, \quad |y - y_0| \leqslant \delta_1, \quad |z - z_0| \leqslant \delta_2\} \tag{2}$$

вырезает из S элементарный гладкий кусок σ:

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in \Delta'), \quad \Delta' = \{|x - x_0| \leqslant \delta_1, \quad |y - y_0| \leqslant \delta_1\} \subset G,$$

где, таким образом, Δ' есть проекция Δ на плоскость $z = 0$.

Если A_0 есть точка края Г элементарного гладкого куска S, то для нее можно только утверждать, что существует трехмерный прямоугольник Δ вида (2) с центром в A_0, вырезающий из $\bar{S}$ кусок ω, описываемый уравнением $z = f(x, y)$ $((x, y) \in \omega')$, где ω' — *часть* Δ'.

Понятия гладкой поверхности и гладкого куска распространяется по аналогии и на случаи, когда эти поверхности описываются уравнениями вида $x = \Psi(y, z)$ или $y = \Phi(z, x)$, т. е. когда они (взаимно однозначно) проектируются соответственно на плоскости $x = 0$, $y = 0$.

Распространим теперь эти понятия на поверхности, которые в целом вообще не проектируются ни на одну из координатных плоскостей.

Условимся говорить, что множество $S \subset R$ *есть гладкая поверхность*, если, какова бы ни была его точка $A^0 = (x^0, y^0, z^0)$, можно указать (трехмерный) прямоугольник

$$\Delta = \{|x - x^0| \leqslant \delta_1, \; |y - y^0| \leqslant \delta_2, \; |z - z^0| \leqslant \delta_3\},$$

вырезающий из S элементарный гладкий кусок σ, который описывается по крайней мере одним из уравнений

$$\left.\begin{array}{ll} z = f_1(x, y) & \{|x - x^0| \leqslant \delta_1, \; |y - y^0| \leqslant \delta_2\}, \\ x = f_2(y, z) & \{|y - y^0| \leqslant \delta_2, \; |z - z^0| \leqslant \delta_3\}, \\ y = f_3(z, x) & \{|z - z^0| \leqslant \delta_3, \; |x - x^0| \leqslant \delta_1\}. \end{array}\right\}$$

Так как мы назвали σ элементарным гладким куском, то тем самым считали само собой разумеющимся, что функции f_1, f_2, f_3 имеют на соответствующих замкнутых прямоугольниках непрерывные частные производные.

Пусть, например, на открытом трехмерном множестве Ω задана произвольная функция $F(x, y, z)$, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка. Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

определяет некоторое множество S точек $(x, y, z) \in \Omega$. Если S непустое множество и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{4}$$

то S есть гладкая поверхность.

В самом деле, пусть $A_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. В силу (4) одна из частных производных от F в точке A_0 не равна нулю; будем считать, что $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \neq 0$. Тогда в силу непрерывности частных производных от F, на основании теоремы о неявной функции (см. § 7.13, теорема 1′), существует трехмерный прямоугольник

$$\Delta = \{|x - x_0|,\ |y - y_0| \leqslant \delta;\ |z - z_0| \leqslant \lambda\}, \quad (\delta,\ \lambda > 0), \tag{5}$$

вырезающий из S часть σ, описываемую явно непрерывно дифференцируемой функцией

$$z = \psi(x, y), \qquad (x, y) \in \Delta',\ \Delta' = \{|x - x_0|,\ |y - y_0| \leqslant \delta\}, \tag{6}$$

т. е. σ — элементарный кусок.

Кусок σ (или поверхность S) имеет в точке A_0 касательную плоскость, определяемую уравнением [см. § 7.5, (13)]

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{7}$$

или, в силу равенств [см. § 7.16, (10′)]

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0},$$

уравнением

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \tag{8}$$

Пример 1. Шаровая поверхность Λ

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (R > 0) \tag{9}$$

есть гладкая поверхность, потому что функция $F = x^2 + y^2 + z^2$ имеет непрерывные частные производные $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$, одновременно не равные нулю на (непустом множестве) Λ. Касательная плоскость к Λ

в точке $(x_0, y_0, z_0) \in \Lambda$ имеет, очевидно, вид

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0.$$

Пример 2. Уравнение $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ определяет круговой конус с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью x.

Частные производные от функции $\Phi(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$, равные $\Phi'_x = 2x$, $\Phi'_y = -2y$, $\Phi'_z = -2z$, обращаются одновременно в нуль только в начале координат. Из геометрических соображений видно, что в начале координат конус не имеет касательной плоскости, во всех же остальных точках касательная плоскость к рассматриваемому конусу существует и непрерывно изменяется вместе с точкой, где она касается конуса.

С точки зрения введенной терминологии можно сказать, что круговой конус, если из него выбросить его вершину, есть гладкая поверхность.

Краем гладкой поверхности S называется множество $\Gamma = \bar{S} - S$, если оно непустое.

Функции

$$z = x^2 + y^2 \qquad (-\infty < x,\ y < \infty),$$

$$z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \qquad (-\pi/2 < x,\ y < \pi/2),$$

$$z = \sin x \qquad (-\infty < x < \infty)$$

описывает неограниченные гладкие поверхности без края. Третья из них определяется ограниченной функцией, но соответствующая поверхность (множество) не ограничена.

Шаровая поверхность S есть гладкое и в то же время замкнутое множество — она не имеет края. Если из S выкинуть принадлежащую ей точку A_0, то останется, очевидно, гладкая поверхность S с краем, состоящим из этой точки.

Часть поверхности S, являющуюся замыканием гладкой связной поверхности с кусочно гладким краем, будем называть *гладким куском* поверхности S.

Часть S_1 шаровой поверхности S [см. (9)], состоящая из точек (x, y, z) с $z > 0$, есть гладкая поверхность. Ее край Γ есть окружность $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. Замыкание $\bar{S}_1 = S_1 + \Gamma$ есть кусок (верхнее полушарие с краем), описываемый функцией $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 \leqslant R^2)$. Эта функция непрерывна на круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, но ее частные производные непрерывны только в открытом круге $x^2 + y^2 < R^2$ и неограничены вблизи его границы. Таким образом, S_1, хотя и проектируется на плоскость (x, y), но соответствующая описывающая S_1 функция не является непрерывно дифференцируемой вплоть до границы указанного круга. На другие координатные плоскости S_1 не проектируется вовсе. Таким образом, S_1 не является элементарным гладким куском. С другой стороны, легко видеть, что S (и S_1) можно разрезать на конечное число элементарных гладких кусков.

Поверхность, если ее можно разрезать на конечное число элементарных гладких кусков, называется кусочно гладкой;

Поверхность *прямоугольника* (прямоугольного параллелепипеда) *кусочно гладкая*, но не гладкая.

Отметим, что гладкая поверхность определена нами так, что она есть по терминологии главы 17 двумерное дифференцируемое многообразие в R_3.

§ 7.20. Гладкая поверхность, заданная параметрически. Ориентируемая поверхность

Мы уже знаем, что гладкая поверхность может быть определена в явном (см., например, § 7.19, (1)) или неявном [см. § 7.19, (3)] виде. Больше того, произвольная гладкая поверхность по самому своему определению всегда локально выражается явно. Существует еще важный способ задания гладких поверхностей — *параметрический*.

Наряду с трехмерным пространством R, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), введем еще плоскость W параметров u, v, где задана прямоугольная система координат (u, v). Пусть $\Omega \subset W$ — открытое множество и на нем заданы три функции от параметров u, v

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega) \tag{1}$$

или, что все равно, векторная функция

$$\mathbf{r} = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные на Ω и что выполняется неравенство

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 > 0 \quad ((u, v) \in \Omega). \tag{3}$$

Геометрическое место S точек (x, y, z), определяемое функциями (1), называют *поверхностью*. При этом тот факт, что S задана функциями (1) с указанными свойствами, мы будем выражать так: *поверхность S гладко задана параметрами* $(u, v) \in \Omega$.

Не всегда поверхность S, гладко заданная при помощи параметров, есть гладкая поверхность (дифференцируемое многообразие) в том смысле, как этот последний термин определен в предыдущем параграфе, но можно дать простой достаточный критерий для этого.

Именно, если уравнения (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие $\Omega \ni (u, v) \rightleftarrows (x, y, z) \in S$, то система функций (1) определенных на любой области $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, описывает гладкую поверхность (дифференцируемое многообразие).

Мы не доказываем здесь это утверждение. Оно не будет нужно для ближайших наших целей. Впрочем, оно доказано, даже в более общем виде, во II томе (см. § 17.1 лемма 1).

Отметим важный факт, вытекающий из неравенства (3). Пусть $(u^0, v^0) \in \Omega$ — произвольная фиксированная точка области пара-