§ 7.2. Предел функции

По определению, *функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет предел в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, равный числу A, обозначаемый так:

$$\lim_{x \to x^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{x_j \to x_j^0 \\ (j=1,\ldots,n)}} f(x_1, \ldots, x_n) = A \tag{1}$$

(пишут еще $f(\mathbf{x}) \to A(\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0)$), если она определена на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и если существует предел

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0 \\ \mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0}} f(\mathbf{x}^k) = A, \tag{2}$$

какова бы ни была стремящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k$ из указанной окрестности ($k = 1, 2, \ldots$), отличных от $\mathbf{x}^0$ (см. § 6.3).

Другое эквивалентное определение заключается в следующем: *функция* f *имеет в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел, равный* A, если она определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta. \tag{4}$$

В этом определении можно заменить неравенства (4) на следующие

$$0 < \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0| < \delta \quad (j = 1, \ldots, n),$$

или сказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ такая, что для всех принадлежащих к ней $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ выполняется (3).

Эквивалентность первого и второго определения в n-мерном случае доказывается аналогично тому, как это делалось в одномерном случае (см. § 4.1).

Сформулируем критерий Коши существования предела (доказываемое как в одномерном случае) (см. § 4.1 теорема 5).

Для того чтобы функция f *имела в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел (конечный), необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлась окрестность* $U(\mathbf{x}^0)$ (в частности, куб или шар с центром в $\mathbf{x}^0$) *так, чтобы для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in U(\mathbf{x}^0)$, *отличных от* $\mathbf{x}^0$, *имело место неравенство*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon.$$

Критерий Коши можно сформулировать и так: *для того чтобы функция* f *имела в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел, необходимо и достаточ-*

но, чтобы функция $f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}')$, *зависящая от переменных* $(\mathbf{x},\mathbf{x}')=(x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')$, *имела предел в точке* $(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^0)$, *равный нулю.*

Очевидно, что если число A есть предел $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^0$, то A есть предел функции $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в нулевой точке:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})=A,$$

и наоборот.

Рассмотрим некоторую функцию f, заданную во всех точках окрестности точки $\mathbf{x}^0$, кроме быть может точки $\mathbf{x}^0$, пусть $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ — произвольный вектор длины единица ($|\boldsymbol{\omega}|=1$) и $t\geqslant 0$ — скаляр. Точки вида $\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}$ $(0\leqslant t)$ образуют выходящий из $\mathbf{x}^0$ *луч в направлении вектора* $\boldsymbol{\omega}$. Для каждого $\boldsymbol{\omega}$ можно рассматривать функцию

$$f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=f\left(x_1^0+t\omega_1,\ldots,x_n^0+t\omega_n\right)\quad (0<t<\delta_\omega)$$

от скалярной переменной t, где δ_ω есть число, зависящее от $\boldsymbol{\omega}$. Предел этой функции (от одной переменной t)

$$\lim_{t\to 0,\,t>0} f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=\lim_{t\to 0,\,t>0} f\left(x_1^0+t\omega_1,\ldots,x_n^0+t\omega_n\right),$$

если он существует, естественно назвать *пределом f в точке $\mathbf{x}^0$ по направлению вектора* $\boldsymbol{\omega}$.

В частности, если $\boldsymbol{\omega}$ — единичный орт $\mathbf{e}^j=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, направленной по оси x_j, то можно говорить о пределе f в точке $\mathbf{x}^0$ по направлению положительной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f\left(x_1^0,\ldots,x_{j-1}^0,x_j^0+t,x_{j+1}^0,\ldots,x_n^0\right),$$

или отрицательной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0-t\mathbf{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f\left(x_1^0,\ldots,x_{j-1}^0,x_j^0-t,x_{j+1}^0,\ldots,x_n^0\right).$$

Из того, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ предел, равный A, следует, очевидно, что она имеет в этой точке предел, равный A, и по любому направлению. Но обратное утверждение неверно — функция f может иметь предел в $\mathbf{x}^0$, равный A по любому направлению и в то же время не иметь предела в $\mathbf{x}^0$.

Пример 1.

$$1)\ f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2};\quad 2)\ \varphi(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Функции f и φ определены на плоскости (x,y), за исключением точки $(0,0)$. Имеем

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{2(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2}=2(x^2+y^2)^{1/2},$$

откуда

$$\lim_{x,y\to 0} f(x, y) = 0$$

(для $\varepsilon > 0$ полагаем $\delta = \varepsilon/2$ и тогда $|f(x, y)| < \varepsilon$, если только $(x^2 + y^2)^{1/2} < \delta$).

Далее, считая, что k постоянная, имеем

$$\varphi(x, kx) = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

откуда видно, что предел φ в $(0, 0)$ по разным направлениям вообще различен. Поэтому φ не имеет предела в $(0, 0)$.

Пример 2. В плоскости (x, y) определим спираль $\rho = \theta$ $(0 < \theta \leqslant 2\pi)$, где ρ — радиус-вектор, а θ — полярный угол. Пусть $\psi(x, y)$ определяется следующим образом (рис. 7.1): $\psi(0, 0) = 1$, $\psi(x, y) = 0$ для $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \theta > 0$, ψ линейна на любом отрезке, соединяющем точку $(0, 0)$ с точкой спирали. Легко видеть, что $\lim\limits_{t\to 0} \psi(tx, ty) = 1$, какова бы ни была точка $(x, y) \neq (0, 0)$, т. е. существует равный 1 предел ψ в $(0, 0)$ по любому направлению, между тем как предел ψ в $(0, 0)$ не существует. Ведь если приближаться к точке $(0, 0)$ по кривой, находящейся между спиралью и осью x в первой четверти плоскости (x, y), то вдоль этой кривой $\psi(x, y) = 0$.

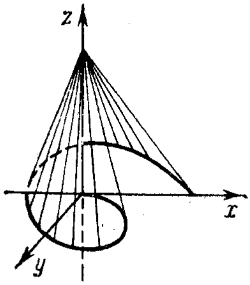

Рис. 7.1.

Будем писать $\lim\limits_{x\to x^0} f(\mathbf{x}) = \infty$, если функция f определена в некоторой окрестности $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, $\mathbf{x}^0$, и для всякого $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(\mathbf{x})| > N$, коль скоро $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$.

Можно говорить о пределе f, когда $\mathbf{x} \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(\mathbf{x}) = A. \tag{5}$$

Например, в случае конечного числа A равенство (5) надо понимать в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N > 0$, что для точек $\mathbf{x}$, для которых $|\mathbf{x}| > N$, функция f определена и имеет место неравенство $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

Справедливы равенства

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}), \tag{7}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \frac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x})} \quad \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\right), \tag{8}$$

где может быть $\mathbf{x}^0 = \infty$. При этом, как обычно, пределы (конечные) в их левых частях существуют, если существуют пределы f и φ. Докажем для примера (7)

Пусть $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0)$; тогда

$$\lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}^k)\varphi(\mathbf{x}^k)) = \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}^k) =$$
$$= \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Таким образом, предел в левой части (9) существует и равен правой части (9), а так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ призвольна, то он равен пределу функции $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет предел, не равный нулю в точке* $\mathbf{x}^0$,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta, \tag{10}$$

она удовлетворяет неравенству

$$|f(\mathbf{x})| > |A|/2. \tag{11}$$

Больше того, она сохраняет там знак A.

В самом деле, положив $\varepsilon = |A|/2$, найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам (10), выполнялось

$$|f(\mathbf{x}) - A| < |A|/2. \tag{12}$$

Поэтому для таких $\mathbf{x}$ $|A|/2 > |A - f(\mathbf{x})| \geqslant |A| - |f(\mathbf{x})|$, т. е. имеет место (11).

Из (12) для указанных $\mathbf{x}$ следует:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(\mathbf{x}) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда $A/2 < f(\mathbf{x})$ при $A > 0$ и $f(\mathbf{x}) < A/2$ при $A < 0$ (сохранение знака).

Замечание. В § 7.10 будет дано более общее определение предела функции, заданной на произвольном множестве.

§ 7.3. Непрерывная функция

По определению, функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в самой точке $\mathbf{x}^0$, и если предел ее в точке $\mathbf{x}^0$ равен ее значению в ней:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0). \tag{1}$$