Поверхность *прямоугольника* (прямоугольного параллелепипеда) *кусочно гладкая*, но не гладкая.

Отметим, что гладкая поверхность определена нами так, что она есть по терминологии главы 17 двумерное дифференцируемое многообразие в R_3.

§ 7.20. Гладкая поверхность, заданная параметрически. Ориентируемая поверхность

Мы уже знаем, что гладкая поверхность может быть определена в явном (см., например, § 7.19, (1)) или неявном [см. § 7.19, (3)] виде. Больше того, произвольная гладкая поверхность по самому своему определению всегда локально выражается явно. Существует еще важный способ задания гладких поверхностей — *параметрический*.

Наряду с трехмерным пространством R, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), введем еще плоскость W параметров u, v, где задана прямоугольная система координат (u, v). Пусть $\Omega \subset W$ — открытое множество и на нем заданы три функции от параметров u, v

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v) \qquad ((u, v) \in \Omega) \tag{1}$$

или, что все равно, векторная функция

$$\mathbf{r} = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные на Ω и что выполняется неравенство

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 > 0 \quad ((u, v) \in \Omega). \tag{3}$$

Геометрическое место S точек (x, y, z), определяемое функциями (1), называют *поверхностью*. При этом тот факт, что S задана функциями (1) с указанными свойствами, мы будем выражать так: *поверхность S гладко задана параметрами* $(u, v) \in \Omega$.

Не всегда поверхность S, гладко заданная при помощи параметров, есть гладкая поверхность (дифференцируемое многообразие) в том смысле, как этот последний термин определен в предыдущем параграфе, но можно дать простой достаточный критерий для этого.

Именно, если уравнения (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие $\Omega \ni (u, v) \rightleftarrows (x, y, z) \in S$, то система функций (1) определенных на любой области $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, описывает гладкую поверхность (дифференцируемое многообразие).

Мы не доказываем здесь это утверждение. Оно не будет нужно для ближайших наших целей. Впрочем, оно доказано, даже в более общем виде, во II томе (см. § 17.1 лемма 1).

Отметим важный факт, вытекающий из неравенства (3). Пусть $(u^0, v^0) \in \Omega$ — произвольная фиксированная точка области параметров. Для нее один из определителей, входящих в (3), положителен, пусть для определенности первый. Тогда найдется окрестность $\omega \subset \Omega$ этой точки такая, что на ней первые два уравнения (1) однозначно разрешимы относительно (u, v). Подставив соответствующие функции от x, y в третье уравнение, получим, что некоторый кусок $\sigma \subset S$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, $\lambda \ni (x, y) \rightleftarrows (u, v) \in \omega$.

Этим доказано, что, какова бы ни была точка (u^0, v^0), существует ее окрестность $\omega \subset \Omega$ такая, что соответствующий ей кусок $\sigma \subset S$ проектируется (взаимно однозначно!) по крайней мере на одну из координатных плоскостей. Это локальное свойство поверхности, гладко заданной через свои параметры, является очень важным, но следует иметь в виду, что оно слабее того свойства, которому должна удовлетворять гладкая поверхность (дифференцируемое двумерное многообразие в пространстве R_3), как она была определена в предыдущем параграфе (см. пример 1).

Пример 1. На рис. 7.5 изображена поверхность S, которую можно себе представить как полученную из прямоугольного листка Δ бумаги ($0 < u < a$, $0 < v < b$) (рис. 7.6), который мы гладко скручиваем, позволив самопересечение по отрезкам $u = u_1$ и $u = u_2$. Реально такую поверхность можно осуществить, разрезав листок Δ на две части по прямой $u = u_2$, скрутив одну из частей и приклеив вторую часть так, как на рис. 7.5. Произвольной точке S припишем в качестве ее параметров (u, v) координаты соответствующей точки прямоугольника Δ. Но каждая точка отрезка $CD \subset S$ при этом будет соответствовать двум парам (u_1, v) и (u_2, v). Благодаря этому S может быть названа самопересекающейся (параметрически заданной) поверхностью. С точки зрения терминологии, принятой нами в предыдущем параграфе, поверхность S не является гладкой: любой прямоугольник (прямоугольный параллелепипед) с центром в какой-либо точке $P \in [C, D]$ вырезает из S часть, не проектирующуюся ни на одну из координатных плоскостей. С другой стороны, определенную точку $P \in [C, D]$ можно считать соответствующей двум точкам (u_1, v_0) и (u_2, v_0) плоскости (u, v). Обе они могут быть покрыты настолько малыми, принадлежащими плоскости (u, v), кружками с центрами в них, что им соответствуют куски $\sigma_1, \sigma_2 \subset S$, каждый из которых проектируется по крайней мере на одну из координатных плоскостей.

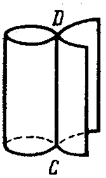

Рис. 7.5.

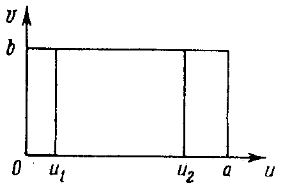

Рис. 7.6.

Интересно еще рассмотреть поверхность $S' \subset S$, соответствующую параметрам (u, v), пробегающим прямоугольник $\Delta' = \{0 < u < u_2, 0 < v < b\}$. Из рис. 7.5 видно, что S' есть параметрически заданная поверхность без самопересечений: имеет место взаимно однозначное соответствие $S' \rightleftarrows \Delta'$. Но все равно точки $P \in [C, D]$ являются особенными для S': в любых как угодно малых (трехмерных) окрестностях Ω таких точек принадлежащие им части $S'\Omega$ не проектируются ни на одну из координатных плоскостей. Таким образом, S', так же, как S, не является гладкой поверхностью.

Замечание. По другой терминологии гладкой поверхностью S' называют совокупность точек (x, y, z), упорядоченную при помощи параметров (u, v) посредством равенств (1), где φ, ψ, χ — непрерывно дифференцируемые функции, подчиняющиеся неравенству (3). Согласно этой терминологии точки (x, y, z), соответствующие разным парам (u, v), считаются разными элементами S, хотя, быть может, эти элементы определяют одну и ту же геометрическую точку (x, y, z).

Заменим параметры (u, v) поверхности S параметрами (u', v');

$$u = \lambda(u', v'), \qquad v = \mu(u', v') \qquad ((u', v') \in \Omega' \rightleftarrows \Omega), \tag{4}$$

где λ и μ — непрерывно дифференцируемые функции с якобианом

$$\frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0 \qquad ((u, v) \in \Omega'), \tag{5}$$

а отображение (4) приводит во взаимно однозначное соответствие открытое множество Ω' параметров (u', v') с открытым же (см. § 7.18) множеством Ω параметров (u, v). В результате получим уравнения S, выраженные через параметры (u', v'):

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(u', v') = \varphi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ y &= \psi_1(u', v') = \psi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ z &= \chi_1(u', v') = \chi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')) \; ((u', v') \subset \Omega'), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где φ_1, ψ_1, χ_1 — функции, непрерывно дифференцируемые на Ω', и где выполняются неравенства

$$|\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 =$$
$$= |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \left(\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2 > 0 \qquad ((u', v') \in \Omega'). \tag{7}$$

Новые параметры (u', v') с указанными выше свойствами мы будем называть *допустимыми параметрами поверхности* S.

Рассмотрим гладкую поверхность S, заданную параметрически при помощи уравнений (1) с указанными там свойствами. В любой точке она имеет касательную плоскость и нормаль. Чтобы получить выражение для нормали в терминах вектора $\mathbf{r} = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k}$, можно рассуждать следующим образом.

Вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ при фиксированном значении параметра v описывает кривую, соответствующую изменению параметра u. Вектор $\dot{\mathbf{r}}_u$ направлен по касательной к этой кривой. Аналогично вектор $\dot{\mathbf{r}}_v$ направлен по касательной к другой кривой, которая описывается вектором $\mathbf{r}$, когда u фиксировано, а v меняется.

Если считать векторы $\dot{\mathbf{r}}_u$, $\dot{\mathbf{r}}_v$ выходящими из точки (u, v) поверхности S, то они определяют проходящую через них плоскость, касательную к S в точке (u, v). Из условия (3) следует, что векторы $\dot{\mathbf{r}}_u$, $\dot{\mathbf{r}}_v$ не коллинеарны. Нормаль к S в точке u, v определяется вектором

$$\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\mathbf{k}. \tag{8}$$

При этом можно определить две единичные, *непрерывно зависящие от* $(u, v) \in \Omega$ *нормали*:

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v\right|} \qquad ((u, v) \in \Omega). \tag{9}$$

Знаку «+» соответствует одна сторона поверхности S со щеткой выпущенных в ее сторону единичных векторов, непрерывно зависящих от (u, v), а знаку «−» — другая сторона S.

Дадим следующее определение. Если из каждой точки A гладкой поверхности S можно выпустить единичную нормаль $\mathbf{n}(A)$ так, что полученная векторная функция от A будет непрерывной на всей поверхности S, то S называется *ориентируемой поверхностью*.

Поверхность, для которой определена такая функция $\mathbf{n}(A)$, называется *ориентированной* [при помощи $\mathbf{n}(A)$]. Если мы будем говорить, что S есть ориентированная гладкая поверхность, то тем самым будем считать, что S обозначает не только поверхность (множество), но и тот факт, что на ней задана указанная непрерывная на S функция $\mathbf{n}(A)$. Говорят еще, что функция $\mathbf{n}(A)$ задает определенную сторону ориентируемой гладкой поверхности [куда выходит из S щетка единичных векторов $\mathbf{n}(A)$, непрерывно зависящих от A].

Ту же поверхность, но ориентированную противоположным образом, надо уже обозначать другой буквой. Две такие противоположно ориентированные поверхности удобно обозначать буквами S_+ и S_-. Одна из них произвольно обозначается через S_+, а другая автоматически получает обозначение S_-.

Шаровая поверхность ориентируема — выпущенный из какой-либо ее точки единичный вектор во вне шара, очевидно, непрерывно продолжается на всю поверхность. Этим шаровая поверхность ориентирована. Другая, противоположная, ориентация шаровой поверхности определяется единичным нормальным к ней вектором, направленным внутрь соответствующего шара.

Выше мы видели, что если S есть гладкая поверхность, определенная параметрически уравнениями (1) с указанными там свойствами, то она ориентируема. Знаку «+» в формуле (9) соответствует некоторая ориентация S, а знаку «−» будет тогда соответствовать противоположная ориентация.

Вообще же существуют гладкие поверхности, неориентируемые (см. следующий параграф).

После сказанного можно утверждать, что *всякая неориентируемая гладкая поверхность не может быть задана параметрически при помощи единой системы уравнений* (1) *с указанными там ограничениями, налагаемыми на функции* φ, ψ, χ.

С другой стороны, мы знаем, что если S есть гладкая поверхность, то по самому ее определению для каждой ее точки A_0 найдется прямоугольник Δ с центром в ней, вырезывающий из S кусок σ, описываемый явно функцией, пусть $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Delta'$, непрерывно дифференцируемой на соответствующей проекции Δ. Ясно, что кусок σ имеет две стороны, определяемые нормалью $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, где

$$n_x = \mp \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; n_y = \mp \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$
$$\left(p = \frac{\partial f}{\partial x}, \; q = \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Верхним знакам в этих равенствах соответствует верхняя сторона куска σ, а нижним — нижняя сторона.

Поэтому можно сказать, что *всякая гладкая поверхность локально ориентируема.*

Пример 2. Шаровая поверхность. Уравнения (см. § 12.19)

$$x = R\cos\theta\cos\varphi, \; y = R\cos\theta\sin\varphi, \; z = R\sin\theta, \; -\infty < \theta, \varphi < \infty, \tag{10}$$

где $R > 0$ — заданное число, определяют при помощи полярных угловых параметров θ, φ шаровую поверхность S радиуса R с центром в нулевой точке, в чем легко убедиться, если исключить из этих уравнений θ и φ.

Область G изменения параметров (θ, φ) является вся плоскость. Правые части уравнений (10) — непрерывно дифференцируемые функции от θ, φ. Вычисления показывают, что

$$|\dot{\mathbf{r}}_\theta \times \dot{\mathbf{r}}_\varphi| = R^2|\cos\theta|. \tag{11}$$

Из (11) мы видим, что нельзя сказать, что шаровая поверхность S задана гладко параметрами θ, φ на всей плоскости этих параметров. Из последней надо исключить точки (θ, φ), у которых $\cos\theta = 0$. Но это недостаток не поверхности, а ее параметрического представления. Как мы знаем (см. предыдущий параграф), S есть гладкая поверхность и ее полюсы, соответствующие значениям $\theta = \pm\pi/2$, не являются исключительными.

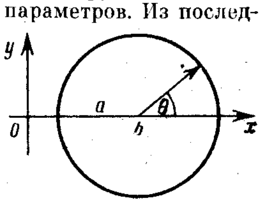

Рис. 7.7.

Параметрическое представление (10) самопересекается потому, что мы не ограничили в нем множество параметров. Более экономно считать его заданным на множестве $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $a \leqslant \varphi < a + 2\pi$, где a — некоторое действительное число. Это множество при помощи (10) отображается взаимно однозначно на шаровую поверхность S, из которой выколоты два ее полюса. На этом множестве $|\dot{\mathbf{r}}_\theta \times \dot{\mathbf{r}}_\varphi| > 0$.

Пример 3. Тор. В плоскости (x, y) зададим окружность радиуса a с центром в точке $(b, 0)$ $(0 < a < b)$. Вращение ее как твердого тела в пространстве (x, y, z) вокруг оси y приводит к поверхности T, называемой *тором*. Пусть θ есть величина угла, изображенного на рис. 7.7, и φ — угол, на который повернута вокруг оси y плоскость нашей окружности. Поверхность T выражается через параметры (θ, φ) так:

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta, \quad z = (b + a\cos\theta)\sin\varphi \qquad (0 \leqslant \theta, \varphi < 2\pi). \tag{12}$$

В декартовых координатах уравнение T имеет вид

$$\Phi = (\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

При этом на T

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = 4\left(\sqrt{x^2 + z^2} - b\right)^2 + 4y^2 > 0.$$

Это показывает (см. § 7.19), что T есть гладкая поверхность, что, впрочем интуитивно очевидно.

§ 7.21. Пример неориентируемой поверхности. Лист Мёбиуса *)

Возьмем прямоугольный лист бумаги (рис. 7.8), который мы будем мыслить без отрезков aa', bb', составляющих части его границ. Перекрутим его один раз и его стороны ab и $a'b'$ склеим так, чтобы точки a, b' и b, a' склеились попарно (рис. 7.9). Полученная поверхность есть *лист Мёбиуса.* Интуитивно ясно, что это будет гладкая поверхность, если скручивать листок гладко, не ломая бумаги. Не так уж трудно, хотя и несколько громоздко, осуществить такую конструкцию при помощи формул, но мы это не будем делать, полагаясь на интуицию читателя. На рис. 7.8 отмечен отрезок cc' — средняя линия прямоугольного листа бумаги. Этой линии на листе Мёбиуса соответствует замкнутая кривая cc' (не изображенная на рис. 7.9), у которой точки c и c' слились

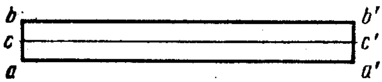

Рис. 7.8.

Рис. 7.9.

в одну точку. Выпустим из c единичную нормаль $\mathbf{n}(c)$ произвольным, но определенным образом. Раз направление $\mathbf{n}(c)$ выбрано (среди двух возможных), то этим уже детерминированно определяется выбор $\mathbf{n}(A)$ для всех точек $A \in cc'$, если мы хотим, чтобы вектор $\mathbf{n}(A)$ непрерывно зависел от A. Однако в точке c' вектор $\mathbf{n}(c')$ уже выбран — ведь c и c' совпадают. Легко видеть, что если точку средней линии прямоугольника непрерывно двигать от c к c', то единичная нормаль $\mathbf{n}(A)$, где A — точка листа Мёбиуса, соответствующая c, будет стремиться к $-\mathbf{n}(c)$, а не к $\mathbf{n}(c)$, и, следовательно, вектор-функция $\mathbf{n}(A)$ оказывается разрывной в точке $c = c' \in S$.

*) А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий геометр.