на который повернута вокруг оси y плоскость нашей окружности. Поверхность T выражается через параметры (θ, φ) так:

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta, \quad z = (b + a\cos\theta)\sin\varphi$$
$$(0 \leqslant \theta, \varphi < 2\pi). \qquad (12)$$

В декартовых координатах уравнение T имеет вид

$$\Phi = (\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

При этом на T

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = 4\left(\sqrt{x^2 + z^2} - b\right)^2 + 4y^2 > 0.$$

Это показывает (см. § 7.19), что T есть гладкая поверхность, что, впрочем интуитивно очевидно.

§ 7.21. Пример неориентируемой поверхности. Лист Мёбиуса *)

Возьмем прямоугольный лист бумаги (рис. 7.8), который мы будем мыслить без отрезков aa', bb', составляющих части его границ. Перекрутим его один раз и его стороны ab и $a'b'$ склеим так, чтобы точки a, b' и b, a' склеились попарно (рис. 7.9). Полученная поверхность есть *лист Мёбиуса*. Интуитивно ясно, что это будет гладкая поверхность, если скручивать листок гладко, не ломая бумаги. Не так уж трудно, хотя и несколько громоздко, осуществить такую конструкцию при помощи формул, но мы это не будем делать, полагаясь на интуицию читателя. На рис. 7.8 отмечен отрезок cc' — средняя линия прямоугольного листа бумаги. Этой линии на листе Мёбиуса соответствует замкнутая кривая cc' (не изображенная на рис. 7.9), у которой точки c и c' слились

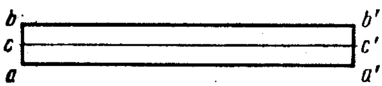

Рис. 7.8.

Рис. 7.9.

в одну точку. Выпустим из c единичную нормаль $\mathbf{n}(c)$ произвольным, но определенным образом. Раз направление $\mathbf{n}(c)$ выбрано (среди двух возможных), то этим уже детерминированно определяется выбор $\mathbf{n}(A)$ для всех точек $A \in cc'$, если мы хотим, чтобы вектор $\mathbf{n}(A)$ непрерывно зависел от A. Однако в точке c' вектор $\mathbf{n}(c')$ уже выбран — ведь c и c' совпадают. Легко видеть, что если точку средней линии прямоугольника непрерывно двигать от c к c', то единичная нормаль $\mathbf{n}(A)$, где A — точка листа Мёбиуса, соответствующая c, будет стремиться к $-\mathbf{n}(c)$, а не к $\mathbf{n}(c)$, и, следовательно, вектор-функция $\mathbf{n}(A)$ оказывается разрывной в точке $c = c' \in S$.

*) А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий геометр.