§ 7.23. Особые точки кривой

Из теории неявной функции известно, что если функция $F(x, y)$, обращается в нуль в точке (x_0, y_0), имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности этой точки и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \neq 0, \tag{1}$$

то существуют такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что множество E всех точек (x, y), принадлежащих прямоугольнику

$$|x - x_0| < \delta_1, \qquad |y - y_0| < \delta_2 \tag{2}$$

и удовлетворяющих равенству $F(x, y) = 0$, описывается функцией $y = \varphi(x)$ $(y_0 = \varphi(x_0))$, имеющей непрерывную производную (на $|x - x_0| < \delta_1$).

Если в этой формулировке вместо (1) предположить, что $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \neq 0$, то можно указать прямоугольник (2) такой, что соответствующее ему множество E описывается равенством $x = \psi(y)$ $(x_0 = \psi(y_0))$, где ψ — функция имеющая непрерывную производную.

Сейчас нас будет интересовать тот случай, когда наложенные на функцию F условия сохраняются, за исключением одного. Именно, будем предполагать, что обе частные производные от F в точке (x_0, y_0) равны нулю: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0$.

Множество Γ всех точек (x, y), для которых функция $F = 0$, мы будем называть кривой, отдавая себе отчет в том, что на самом деле Γ может не быть геометрическим образом, который обычно принято называть кривой. Например, если функция F тождественно равна нулю, то Γ есть вся плоскость (x, y). Нас будет интересовать вопрос, какой вид имеет Γ в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0).

Не уменьшая общности, будем считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Будем предполагать также, что функция F имеет непрерывные частные производные четвертого порядка (за исключением одного случая, $AC - B^2 > 0$, когда достаточно существования вторых непрерывных производных).

Положим $A = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0$, $B = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0$, $C = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0$.

Будем предполагать, что числа A, B, C одновременно не равны нулю и рассмотрим отдельно возможные случаи.

1) $AC - B^2 > 0$. Тогда на основании теории локального абсолютного экстремума функция F достигает в точке $(0, 0)$ строгого локального максимума или строгого локального минимума, откуда следует, что для точек достаточно малого круга σ с центром в нулевой точке, отличных от центра, $F(x, y) \neq 0$.

Таким образом, кривая Г, описываемая уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

в круге σ сводится к одной точке (0, 0).

В этом случае говорят, что точка (0, 0) есть *изолированная точка* Г. Сама она принадлежит к Г, но в ее достаточно малой окрестности нет других точек Г.

Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ может служить простым примером этого случая.

2) $AC - B^2 < 0$. Согласно формуле Тейлора

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \mu(x, y), \tag{4}$$

где μ имеет в нулевой точке вторые производные, равные нулю и

$$\mu = O(\rho^3) \qquad (\rho^2 = x^2 + y^2). \tag{5}$$

В первом приближении уравнение $F(x, y) = 0$ естественно заменить уравнением $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, которое в данном случае ($AC - B^2 < 0$) определяет пару (не мнимых) прямых

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y) = 0, \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Если сделать подстановку

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y, \qquad \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y, \tag{8}$$

то из (4) получим

$$F(x, y) = \Phi(\xi, \eta) = \xi\eta + \psi(\xi, \eta), \tag{9}$$

где

$$\psi = O(r^3) \qquad (r^2 = \xi^2 + \eta^2). \tag{10}$$

Здесь (10) следует из (5), так как в силу (7)

$$c_1\rho < r < c_2\rho,$$

где $c_1, c_2 > 0$ — некоторые константы.

В силу единственности разложения по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано (см. § 7.14) из (10) следует, что представление (9) есть формула Тейлора функции $\Phi(\xi, \eta)$ в окрестности $\xi = \eta = 0$ с остаточным членом порядка $l = 3$. Но тогда

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i \eta^{3-i} \psi_i(\xi, \eta),$$

где ψ_i имеют непрерывные частные производные первого порядка (см. конец § 7.13).

Итак,

$$\Phi(\xi, \eta) = \xi\eta + \sum_{i=0}^{3} \xi^i \cdot \eta^{3-i}\psi_i(\xi, \eta). \tag{11}$$

В плоскости (ξ, η) (рис. 7.10) проведем две биссектрисы, делящие пополам координатные углы. Для исследования части γ_1' кривой Γ' $(\Phi(\xi, \eta) = 0)$, попавшей (в достаточно малой окрестности нулевой точки) в затушеванную фигуру, сделаем замену переменных (ξ, η) на (ξ, u), где

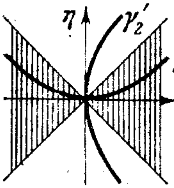

Рис. 7.10.

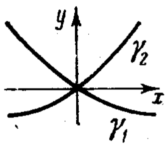

Рис. 7.11.

$$\eta = \xi u, \quad (|u| \leqslant 1). \tag{12}$$

А для исследования части γ_2' кривой Γ', попавшей в незатушеванную фигуру, заменим (ξ, η) на (u, η), где

$$\xi = u\eta \quad (|u| \leqslant 1). \tag{13}$$

В силу (11) и (12)

$$\Phi(\xi, \eta) = \xi^2 u + \xi^3\varphi(\xi, u) = 0, \tag{14}$$

где $\varphi(\xi, u)$ имеет непрерывные частные производные.

Сокращая на ξ^2, получим

$$\lambda(\xi, u) = u + \xi\varphi(\xi, u) = 0. \tag{15}$$

Точке $\xi = 0$, $\eta = 0$ в силу (12) могут соответствовать точки (ξ, u), где $\xi = 0$ и $|u| \leqslant 1$. Но уравнению (15) может удовлетворить только точка $\xi = 0$, $u = 0$. Левая его часть при этом имеет непрерывные частные производные в окрестности точки $\xi = 0$, $u = 0$ и $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)_0 = 1$. В таком случае, на основании теоремы о неявных функциях, существует, и притом единственная, функция $u = \mu(\xi)$ $(\mu(0) = 0)$, определенная на достаточно малом интервале $|\xi| < \delta$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая уравнению (15), и тогда соответствующая ей функция

$$\eta = \xi\mu(\xi), \tag{16}$$

также непрерывно дифференцируемая на $|\xi| < \delta$, имеет производную $(\eta')_0 = 0$ и удовлетворяет уравнению $\Phi(\xi, \eta) = 0$. Она описывает кусок γ_1' кривой Γ'. Другой кусок γ_2' кривой Γ', касательный к оси η в нулевой точке, обнаруживается посредством подстановки (13).

Таким образом, в рассматриваемом случае кривая Γ (образ Γ' при обратной замене ξ, η на x, y) в окрестности нулевой точки плоскости x, y распадается на два пересекающиеся под углом (не равным нулю) куска γ_1 и γ_2 (рис. 7.11).

3) $AC - B^2 = 0$. В этом случае

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (\alpha x + \beta y)^2,$$

где α и β одновременно не равны нулю. Положим $\xi = \beta x - \alpha y$, $\eta = \alpha x + \beta y$ и, рассуждая как выше, получим, что в новой (прямоугольной) системе координат (ξ, η) наша кривая определится уравнением

$$\eta^2 + \sum_{i=0}^{3} \xi^i \eta^{3-i} \psi_i(\xi, \eta) = 0, \tag{17}$$

где ψ_i имеют непрерывные производные. Подстановка $\eta = u\xi$ приводит после сокращения на ξ^2 к уравнению

$$\varkappa(\xi, u) = u^2 + \xi\varphi(\xi, u) = 0. \tag{18}$$

Теперь снова $\varkappa(0, 0) = 0$ ($\varkappa(0, u) \neq 0$ при $u \neq 0$). Если $(\varphi)_0 = \varphi(0, 0) \neq 0$ [случай $(\varphi)_0 = 0$ исключительный], что наиболее вероятно, то $\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\right)_0 = (\varphi)_0 \neq 0$. Поэтому к равенству (18) применима теорема о неявной функции, в силу которой существует, и притом единственная, функция $\xi = \nu(u)$ $(0 = \nu(0))$, имеющая непрерывную производную, удовлетворяющая в достаточно малой окрестности $u = 0$ уравнению (18).

Имеем $\nu(u) = -u^2\varphi(\xi, u)$, $\nu'(u) = -\left\{2u\varphi - u^2 \frac{d}{du}\varphi(\nu(u), u)\right\}\Big/\varphi^2$. Пусть $(\varphi)_0 < 0$, тогда, очевидно, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\nu'(u) \begin{cases} > 0 & (\ \ 0 < u \leqslant \delta), \\ < 0 & (-\delta \leqslant u < 0), \\ \ \ 0 & (u = 0), \end{cases}$$

и $\nu(u)$ строго убывает до нуля на $[-\delta, 0]$ и строго возрастает от нуля на $[0, \delta]$. Поэтому на каждом из этих отрезков функция

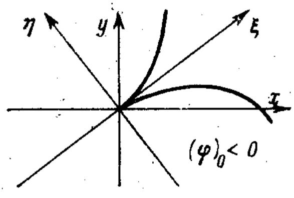

Рис. 7.12.

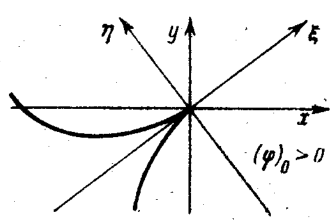

Рис. 7.13.

$\xi = \nu(u)$ обратима и имеют смысл обратные непрерывные функции, которые могут быть записаны в виде $u = \pm\sqrt{-\xi[(\varphi)_0 + \varepsilon(\xi)]}$ $(\varepsilon(\xi) \to 0,\ \xi \to 0)$, где $\xi > 0$.

Следовательно, мы получим два гладких куска кривой Γ':

$$\eta = \pm\xi\sqrt{-\xi[(\varphi)_0 + \varepsilon]} \approx \pm\xi^{3/2}\sqrt{-(\varphi)_0} \qquad (\xi \to 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant \delta).$$

Соответствующая исходная кривая Γ изображена на рис. 7.12. Говорят в этом случае, что $(0, 0)$ есть точка *возврата кривой* Γ.

При $(\varphi)_0 > 0$ картина аналогична, но «возврат» имеет место в область $\xi < 0$ (рис. 7.13), когда подкоренное выражение положительно.

Конечно, если $(\varphi)_0 = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Заметим, что подстановка $\xi = u\eta$ не дает новой ветви кривой, потому что после сокращения (17) на η^2 получим уравнение $1 + \eta\gamma(\eta, u) = 0$, не имеющее решения при $\eta = 0$ и конечном u.

§ 7.24. Кривые на поверхности

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую поверхность σ:

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

и принадлежащую ей дважды дифференцируемую гладкую кривую Γ: $\mathbf{r}(s) = \varphi(s)i + \psi(s)j + \xi(s)k$, где s — длина дуги Γ.

Будем пользоваться обозначениями

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{2}$$

(мы думаем, что от того, что s обозначает длину дуги Γ и производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, путаницы не произойдет).

Единичная нормаль к поверхности σ в ее точке $A = (x, y, z)$, образующая острый угол с положительным направлением оси z, равна

$$\mathbf{n} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{i} + \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{k}.$$

С другой стороны, единичный вектор главной нормали к Γ в A равен (§ 6.10, (3))

$$\mathbf{v} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = R\ddot{\mathbf{r}} = R\left(\frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{dz^2}{ds^2}\mathbf{k}\right) \quad (\ddot{\mathbf{r}} \neq 0),$$

где R — радиус кривизны Γ $(R > 0)$ и x, y, z — компоненты $\mathbf{r}$.

Обозначим через θ угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$. Тогда

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{-p\,d^2x - q\,d^2y + d^2z}{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{3}$$

Но так как $\Gamma \subset \sigma$, то дифференциалы компонент $\mathbf{r}$ (соответствующие ds) удовлетворяют условию связи $dz = p\,dx + q\,dy$, откуда

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \tag{4}$$